

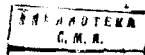
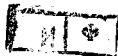
Н. Н. ЛЕБЕДЕВ

517
133

56)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

73328



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	8
Глава I. Гамма-функция	
§ 1.1. Определение гамма-функции	11
§ 1.2. Функциональные соотношения для гамма-функции ..	13
§ 1.3. Логарифмическая производная гамма-функции	16
§ 1.4. Асимптотическое представление гамма-функции для больших $ z $	21
§ 1.5. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией	27
§ 1.6. Таблицы гамма-функции	29
<i>Упражнения</i>	30
Глава II. Интеграл вероятности и связанные с ним функции	
§ 2.1. Интеграл вероятности и его основные свойства ...	32
§ 2.2. Асимптотическое представление для интеграла вероят- ности при больших значениях $ z $	34
§ 2.3. Интеграл вероятности от мнимого аргумента. Функ- ция $F(z)$	36
§ 2.4. Интеграл вероятности от аргумента x/\sqrt{t} . Интегралы Френеля	38
§ 2.5. Приложение к теории вероятностей	41
§ 2.6. Приложение к теории теплопроводности. Остывание плоской поверхности неограниченного нагретого тела	43
§ 2.7. Приложение к теории колебаний. Поперечные коле- бания бесконечного стержня под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы	45
§ 2.8. Таблицы интеграла вероятности и родственных ему функций	47
<i>Упражнения</i>	49
Глава III. Интегральная показательная функция и род- ственные ей специальные функции	
§ 3.1. Интегральная показательная функция и ее основные свойства	51
§ 3.2. Асимптотическое представление интегральной пока- зательной функции для $ z \rightarrow \infty$	54

§ 3.3. Интегральная показательная функция с мнимым аргументом. Интегральные <i>сиус</i> и <i>костус</i>	56
§ 3.4. Интегральный логарифм	60
§ 3.5. Приложение к радиотехнике. Излучение линейного полуволнового вибратора	62
§ 3.6. Таблицы интегральной показательной функции и других родственных ей функций	65
<i>Упражнения</i>	66
Глава IV. Ортогональные полиномы	
§ 4.1. Общие замечания об ортогональных полиномах	68
§ 4.2. Полиномы Лежандра. Определение и производящая функция	69
§ 4.3. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра	72
§ 4.4. Интегральные представления для полиномов Лежандра	74
§ 4.5. Ортогональность полиномов Лежандра	76
§ 4.6. Асимптотическое представление полиномов Лежандра для больших значений индекса n	78
§ 4.7. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра	81
§ 4.8. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лежандра	87
§ 4.9. Полином Эрмита. Определение и производящая функция	89
§ 4.10. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита	91
§ 4.11. Интегральные представления для полиномов Эрмита	93
§ 4.12. Интегральные уравнения для полиномов Эрмита	94
§ 4.13. Ортогональность полиномов Эрмита	95
§ 4.14. Асимптотическое представление полиномов Эрмита для больших значений индекса n	97
§ 4.15. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита	99
§ 4.16. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Эрмита	107
§ 4.17. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция	108
§ 4.18. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра	110
§ 4.19. Интегральные представления для полиномов Лагерра. Связь между полиномами Лагерра и Эрмита	113
§ 4.20. Интегральное уравнение для полиномов Лагерра	115
§ 4.21. Ортогональность полиномов Лагерра	117
§ 4.22. Асимптотическое представление полиномов Лагерра для больших значений индекса n	119
§ 4.23. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра	123
§ 4.24. Приложение к теории распространения электромагнитных волн вдоль длинных линий. Отражение от конца линии, замкнутой на сосредоточенную индуктивность	125
§ 4.25. Таблицы ортогональных полиномов	128
<i>Упражнения</i>	129

Глава V. Цилиндрические функции

§ 5.1. Введение	133
§ 5.2. Функции Бесселя с целым положительным значением	134
§ 5.3. Функции Бесселя с произвольным значением	138
§ 5.4. Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода	141
§ 5.5. Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значением	144
§ 5.6. Функции Бесселя третьего рода	147
§ 5.7. Функции Бесселя мнимого аргумента	148
§ 5.8. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа	151
§ 5.9. Вронскиан системы решений уравнения Бесселя	153
§ 5.10. Интегральные представления для цилиндрических функций	155
§ 5.11. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента	167
§ 5.12. Теоремы сложения для цилиндрических функций	173
§ 5.13. Нули цилиндрических функций	177
§ 5.14. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям	179
§ 5.15. Определенные интегралы, содержащие цилиндрические функции	184
§ 5.16. Цилиндрические функции с вещественными положительными аргументом и значением	188
§ 5.17. Таблицы цилиндрических функций	190
<i>Упражнения</i>	192

Глава VI. Приложение цилиндрических функций к задачам математической физики

§ 6.1. Введение	195
§ 6.2. Разделение переменных в уравнении $\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$ в цилиндрической системе координат	196
§ 6.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для цилиндра. Пример из теории теплопроводности	198
§ 6.4. Краевая задача для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями	203
§ 6.5. Краевая задача для клиновидной области	204
§ 6.6. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного вблизи края тонкой проводящей плоскости	207
§ 6.7. Приложение к теории теплопроводности. Задача об охлаждении цилиндра	209
§ 6.8. Приложение к теории дифракции	211

Глава VII. Сферические функции

§ 7.1. Введение	214
§ 7.2. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение и его решение с помощью рядов	215

§ 7.3.	Сферические функции Лежандра	218
§ 7.4.	Интегральные представления для сферических функций	228
§ 7.5.	Функциональные соотношения для сферических функций	232
§ 7.6.	Представление сферических функций с помощью рядов	234
§ 7.7.	Вронскиан системы решений уравнения Лежандра	241
§ 7.8.	Рекуррентные соотношения	244
§ 7.9.	Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полными функциями Лежандра	246
§ 7.10.	Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа	248
§ 7.11.	Асимптотические представления сферических функций при больших значениях l	252
§ 7.12.	Присоединенные сферические функции	256
§ 7.13.	Таблицы сферических функций	266
Упражнения	267
Глава VIII. Приложение сферических функций к задачам математической физики		
§ 8.1.	Введение	270
§ 8.2.	Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат	272
§ 8.3.	Применение метода частных решений к краевой задаче для сферической области	273
§ 8.4.	Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного внутри полой проводящей сферы	276
§ 8.5.	Применение метода частных решений к краевой задаче для конической области	278
§ 8.6.	Разделение переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах	281
§ 8.7.	Краевые задачи для эллипсоидов вращения	285
§ 8.8.	Пример из математической физики. Притяжение вытянутого однородного эллипсоида	288
§ 8.9.	Краевая задача для гиперболоида вращения	290
§ 8.10.	Торондальные координаты	292
§ 8.11.	Краевая задача для гома. Пример из электростатики	295
§ 8.12.	Краевая задача для области, ограниченной двумя пересекающимися сферами	298
§ 8.13.	Биполярные координаты и их приложения к краевым задачам математической физики	308
§ 8.14.	Приложение сферических функций к интегрированию уравнения Гельмгольца	308
Глава IX. Гипергеометрические функции		
§ 9.1.	Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение	310
§ 9.2.	Предел суммы гипергеометрического ряда при $x \rightarrow 1$ и $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$	314

§ 9.3.	Функциональные соотношения для гипергеометрической функции	317
§ 9.4.	Формулы для аналитического продолжения гипергеометрической функции при специальных соотношениях между ее параметрами	325
§ 9.5.	Представление различных функций через гипергеометрическую функцию	328
§ 9.6.	Вырожденная гипергеометрическая функция	331
§ 9.7.	Асимптотическое представление вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях ее аргумента	335
§ 9.8.	Представление различных функций через вырожденную гипергеометрическую функцию	342
§ 9.9.	Таблицы гипергеометрических функций	347
Упражнения	348

Глава X. Функции параболического цилиндра

§ 10.1.	Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах	351
§ 10.2.	Функции Эрмита первого рода	353
§ 10.3.	Функции Эрмита второго рода	357
§ 10.4.	Рекуррентные соотношения для функций Эрмита	358
§ 10.5.	Интегральные представления для функций параболического цилиндра	361
§ 10.6.	Функциональное соотношение между $H_1(z)$ и $H_0(\pm iz)$	362
§ 10.7.	Асимптотическое представление функций параболического цилиндра для больших значений аргумента	364
§ 10.8.	Функции Эрмита мнимого аргумента	368
§ 10.9.	Краевая задача для параболического цилиндра	371
§ 10.10.	Приложение к квантовой механике	375
Упражнения	376

Литература 377

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена одному из разделов математики, знание которого представляется весьма существенным для научных работников и инженеров-исследователей, встречающихся в своей работе с математическими расчетами.

Книга содержит систематическое изложение основ теории важнейших специальных функций, а также некоторые приложения этой теории к конкретным задачам математической физики и техники.

При отборе материала, вошедшего в книгу, ставилась цель изложить с достаточной полнотой те вопросы, которые представляют наибольший интерес с точки зрения приложений, что естественно образом привело к известному ограничению чисто теоретической части; значительное внимание уделено технике вычислений, описанию существующих таблиц и т. д.

Некоторые свойства рассматриваемых функций, которые не могли быть включены в основной текст из соображений ограничения объема книги, но являются полезными в приложениях, приведены в примерах, помещенных в виде упражнений к соответствующим главам.

Книга рассчитана на читателя, знакомого с основами теории функций комплексного переменного, без привлечения которой невозможно сколько-нибудь глубокое изучение специальных функций. Однако, имея в виду облегчить пользование книгой для лиц, не являющихся специалистами математиками, автор стремился по возможности ограничиться лишь немногими сведениями из теории функций комплексного переменного, которые неоднократно используются на протяжении всей книги. В частности, это обстоятельство заставило автора отказаться от принятого в некоторых монографиях порядка изложения, при котором определения ряда специаль-

ных функций даются через контурные интегралы, наиболее удобные для представления этих функций.

Объем сведений по теории функций комплексного переменного, который необходим для понимания основного текста настоящей книги, перекрывается содержанием первой и третьей глав второй части третьего тома „Курса высшей математики“ В. И. Смирнова, причем наиболее существенными являются разделы теории, изложенные в §§ 1—7, 9—21, 55—59, 64—67 и 70. Особое внимание следует обратить на такие вопросы, как классификация функций, контурное интегрирование, исследование свойств функций, определенных посредством рядов или интегралов, и аналитическое продолжение.

Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений не предполагается известной, однако небольшое знакомство с этой теорией, в объеме, например, §§ 95—99 цитированного выше курса, представляется весьма желательным.

Что касается сведений из других разделов математического анализа (математическая физика, интегральные преобразования и т. д.), то область их применения ограничивается исключительно отдельными примерами, относящимися к приложениям специальных функций, и отсутствие детального знакомства с этими методами не является существенным препятствием к чтению настоящей книги.

Предполагается, что читатель встречался с необходимостью использования специальных функций в своей практической деятельности, в связи с чем в книге в ряде случаев отсутствует мотивировка целесообразности введения тех или иных специальных функций; по той же причине автор счел возможным при выборе способа определения функций и методов получения их свойств руководствоваться в первую очередь стремлением к простоте изложения, а не историческими или иными соображениями.

Расположение материала книги по главам подчинено стремлению сделать отдельные части книги в известной степени независимыми друг от друга и дать возможность изучать более простые классы функций вне зависимости от знакомства с теорией функций более общего типа. Как пример укажем на выделение полиномов Лежандра и функций Бесселя целых номеров из общей теории сферических и

цилиндрических функций, а также на построение теории сферических функций без использования соответствующих свойств гипергеометрической функции.

Выбор приложений преследует главным образом цель иллюстрировать различные стороны применения специальных функций к проблемам физики и техники и не ставит задачей дать сколько-нибудь подробное освещение соответствующих разделов математической физики. Наиболее подробно рассмотрен вопрос о применении цилиндрических и, особенно, сферических функций, недостаточно освещенный в отечественной литературе.

ГЛАВА I

ГАММА-ФУНКЦИЯ

§ 1.1. Определение гамма-функции

К числу наиболее простых и важных специальных функций относится гамма-функция, знакомство со свойствами которой является необходимой предпосылкой для изучения многих других специальных функций, как, например, цилиндрических функций, гипергеометрической функции и т. д.

Теория гамма-функции рассматривается в курсах анализа и теории функций комплексного переменного, в связи с чем мы в данной главе ограничимся лишь кратким обзором этой теории, отсылая читателя за различными деталями к существующей литературе *).

Гамма-функция $\Gamma(z)$ для любых значений комплексного переменного z , вещественная часть которых положительна, определяется при помощи формулы:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.1.1)$$

Интеграл (1.1.1) сходится равномерно в области $0 < \delta \leq R(z) \leq A < \infty$, так как при этом $|e^{-t} t^{z-1}| \leq \varphi(t)$, где $\varphi(t) = e^{-t} t^{A-1}$ ($0 < t \leq 1$), $\varphi(t) = e^{-t} t^{A-1}$ ($t \geq 1$) и интеграл от $\varphi(t)$, взятый по промежутку $(0, \infty)$, сходится. Отсюда, на основании известной теоремы теории функций

*) См., например: В. И. Смирнов [1], Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон [1].

Список литературы помещен в конце книги.

комплексного переменного, следует, что $\Gamma(z)$ есть регулярная функция в области $R(z) > 0$ *).

Значение гамма-функции в остальной части плоскости комплексного переменного должно быть найдено путем аналитического продолжения определенной выше функции. Чтобы получить это продолжение, заметим предварительно, что если выполнить в (1.1,1) интегрирование по частям

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} e^{-tz} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-tz} dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-tz} dt,$$

то из последней формулы следует функциональное соотношение

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (1.1,2)$$

в предположении, что $R(z) > 0$.

Рассмотрим теперь функцию комплексного переменного $f(z)$, которая для любых значений z , принадлежащих области $R(z) > -(n+1)$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, определяется при помощи равенства

$$f(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}, \quad (1.1,3)$$

где $\Gamma(z)$ обозначает функцию, представленную интегралом (1.1,1).

Функция $f(z)$ регулярна в рассматриваемой области и, на основании (1.1,2), ее значение при $R(z) > 0$ совпадает с $\Gamma(z)$. Поэтому $f(z)$ есть искомое аналитическое продолжение $\Gamma(z)$ в область $-(n+1) < R(z) \leq 0$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$,

*) Эта теорема содержит следующее утверждение. Интеграл $F(z) = \int_C f(z, t) dt$, взятый по отрезку или некоторой кривой в

плоскости комплексного переменного t , есть регулярная функция комплексного переменного z в области D , если выполнены условия: 1) $f(z, t)$ — непрерывная функция t на дуге C ; 2) для всякого t , принадлежащего этой дуге, $f(z, t)$ — регулярная функция z в области D . Теорема верна также для несобственных интегралов, при дополнительном условии равномерной сходимости интеграла в области D .

См., например, В. И. Смирнов в [1], стр. 257—260.

и мы можем определить гамма-функцию в этой области посредством формулы:

$$\Gamma(z) \equiv f(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n)}. \quad (1.1,4)$$

Так как число n может быть выбрано произвольно большим, гамма-функция определена на всей плоскости комплексного переменного, исключая точки $z=0, -1, -2, \dots$. Последние точки являются полюсами рассматриваемой функции. Действительно, в окрестности точки $z=-n$, $\Gamma(z)$ представляется формулой (1.1,4), откуда следует, что

$$\lim_{z \rightarrow -n} \Gamma(z)(z+n) = (-1)^n \frac{\Gamma(1)}{n!} = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad (1.1,5)$$

так как, согласно (1.1,1), $\Gamma(1) = 1$.

Таким образом, $\Gamma(z)$ есть мероморфная функция комплексного переменного с простыми полюсами в точках $z=0, -1, -2, \dots$.

Из (1.1,5) вытекает, что разложение $\Gamma(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=-n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) имеет вид:

$$\Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + P(z+n), \quad (1.1,5)$$

где $P(z+n)$ — правильная часть.

Ниже (§ 1.2) будет показано, что гамма-функция не имеет нулей на плоскости комплексного переменного, поэтому $[\Gamma(z)]^{-1}$ есть целая функция.

§ 1.2. Функциональные соотношения для гамма-функции

Гамма-функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет трем функциональным соотношениям:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (1.2,1)$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (1.2,2)$$

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2z), \quad (1.2,3)$$

которые играют важную роль при различных преобразованиях и вычислениях, связанных с этой функцией.

Справедливость первого из указанных соотношений вытекает непосредственно из определения $\Gamma(z)$ (§ 1.1). Для доказательства второго функционального соотношения предположим временно, что z есть вещественное число, принадлежащее промежутку $0 < z < 1$, и воспользуемся интегральным представлением (1.1,1).

Мы получим тогда

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} s^{-z} t^{z-1} ds dt,$$

или, если ввести новые переменные (u, v) , положив

$$u = s + t, \quad v = \frac{t}{s},$$

то

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u} v^{z-1} \frac{du dv}{1+v} = \int_0^{\infty} \frac{v^{z-1}}{1+v} dv = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

на основании известной формулы теории определенных интегралов*).

Таким образом, соотношение (1.2,2) доказано для всех z , принадлежащих промежутку $(0, 1)$. Справедливость полученного результата для любых комплексных $z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ вытекает теперь из общего принципа аналитического продолжения, если заметить, что левая и правая части рассматриваемого равенства остаются при этом регулярными функциями комплексного переменного z **).

Чтобы доказать соотношение (1.2,3), известное под названием формулы удвоения для гамма-функции, предположим,

*) См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 232.

**) Согласно этому принципу, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем, равенство $f(z) = \varphi(z)$, установленное для некоторой области D плоскости комплексного переменного, сохраняет силу в более широкой области D^* , включающей D , для которой обе части рассматриваемого равенства остаются регулярными функциями. Тот же результат имеет место, если равенство выполняется на каком-либо отрезке, принадлежащем D^* . См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 67.

что $z > 0$, и снова воспользуемся равенством (1.1,1). Тогда имеем:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(s+t)} (2\sqrt{st})^{2z-1} t^{-\frac{1}{2}} ds dt = \\ = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} \alpha d\alpha d\beta,$$

где новые переменные (α, β) связаны со старыми переменными (s, t) соотношениями $\sqrt{s} = \alpha$, $\sqrt{t} = \beta$.

Если поменять в полученной формуле α и β местами и сложить затем оба равенства, то приходим к более симметричному представлению:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta = \\ = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(\alpha^2+\beta^2)} (2\alpha\beta)^{2z-1} (\alpha + \beta) d\alpha d\beta,$$

где интегрирование производится по сектору $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \alpha$.

Вводя новые переменные (u, v) по формулам

$$u = \alpha^2 + \beta^2, \quad v = 2\alpha\beta,$$

находим:

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} v^{2z-1} dv \int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u-v}} du = \\ = 2 \int_0^{\infty} e^{-v} v^{2z-1} dv \int_0^{\infty} e^{-w^2} dw = \pi^{\frac{1}{2}} \Gamma(2z).$$

Распространение результата на любые комплексные значения $z \neq 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, \dots$ производится, как и выше, с помощью принципа аналитического продолжения.

Применим выведенные функциональные соотношения для того, чтобы вычислить значения гамма-функции при некоторых частных значениях переменного z .

Воспользовавшись (1.2,1) и замечая, что $\Gamma(1) = 1$, находим по индукции

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.2,4)$$

Далее, полагая в (1.1,1) $z = \frac{1}{2}$, получаем:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}, \quad (1.2,5)$$

и применение формулы (1.2,1) дает:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.2,6)$$

и т. д.

В заключение докажем, что функция $\Gamma(z)$ не имеет нулей на плоскости комплексного переменного. В самом деле, точки $z = n$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) не являются нулями функции, так как $\Gamma(n) = (n-1)!$ ($n=1, 2, \dots$) и $\Gamma(n) = \infty$ ($n=0, -1, -2, \dots$). Для остальных значений z справедлива формула (1.2,2), откуда непосредственно следует требуемый результат, так как, допустив, что точка $z = z_0$ есть нуль $\Gamma(z)$, мы пришли бы к заключению, что рассматриваемая точка является полюсом функции $\Gamma(1-z)$.

§ 1.3. Логарифмическая производная гамма-функции

Теория гамма-функции тесно связана с теорией другой специальной функции $\psi(z)$, которая представляет собой логарифмическую производную $\Gamma(z)$, т. е.

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (1.3,1)$$

Так как $\Gamma(z)$ — мероморфная функция и не имеет нулей, то $\psi(z)$ не может иметь других особых точек, кроме полюсов гамма-функции $z = -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Из (1.1,6) следует, что разложение $\psi(z)$ в окрестности точки $z = -n$ имеет вид:

$$\psi(z) = -\frac{1}{z+n} + P(z+n), \quad (1.3,2)$$

поэтому $\psi(z)$ есть мероморфная функция с простыми полюсами $z = 0, -1, -2, \dots$

Функция $\psi(z)$ удовлетворяет функциональным соотношениям, которые получаются из равенств (1.2,1—3), если взять от них логарифмические производные.

Эти соотношения имеют вид:

$$\psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z), \quad (1.3,3)$$

$$\psi(1-z) - \psi(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z, \quad (1.3,4)$$

$$\psi(z) + \psi\left(z + \frac{1}{2}\right) + 2 \ln 2 = 2\psi(2z). \quad (1.3,5)$$

Полученные равенства могут быть использованы для того, чтобы вычислить значения $\psi(z)$ при отдельных значениях z .

Обозначая

$$\psi(1) = \Gamma'(1) = -\gamma, \quad (1.3,6)$$

где γ — постоянная Эйлера, $\gamma = 0,5772157, \dots$, и применяя формулу (1.3,3), находим:

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.3,7)$$

Далее, полагая в (1.3,5) $z = \frac{1}{2}$, получаем:

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2, \quad (1.3,8)$$

и формула (1.3,3) дает:

$$\psi\left(n + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}, \quad (1.3,9)$$

$$n=1, 2, \dots$$

Функция $\psi(z)$ допускает простые интегральные представления в форме определенных интегралов, содержащих переменное z в качестве параметра.

Чтобы вывести эти представления, заметим прежде всего, что в силу равномерной сходимости интеграла (1.1,1), производная гамма-функции при $R(z) > 0$ выражается формулой

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \ln t dt. \quad (1.3,10)$$

Если заменить логарифм в подинтегральном выражении через интеграл Фруллани*)

$$\ln t = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-xt}}{x} dx, \quad R(t) > 0, \quad (1.3,11)$$

то приходим к представлению $\Gamma'(z)$ в форме двойного интеграла, который, как нетрудно показать, будет абсолютно сходящимся при $R(z) > 0$. Поэтому мы можем изменить порядок интегрирования и написать:

$$\begin{aligned} \Gamma'(z) &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \int_0^{\infty} (e^{-x} - e^{-xt}) e^{-t^{z-1}} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left[e^{-x} \Gamma(z) - \int_0^{\infty} e^{-t(x+1)} t^{z-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Если ввести новое переменное интегрирования $u = t(x+1)$, то находим, что значение интеграла в квадратных скобках будет $(x+1)^{-z} \Gamma(z)$, откуда непосредственно вытекает первое из интегральных представлений для $\psi(z)$:

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x}, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,12)$$

Чтобы получить второе интегральное представление для $\psi(z)$, запишем формулу (1.3,12) в виде

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^{\infty} \left[e^{-x} - \frac{1}{(x+1)^z} \right] \frac{dx}{x} = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^z x} \right] \end{aligned}$$

и заменим во втором интеграле переменную интегрирования положив $x+1 = e^t$.

Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\delta}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt \right] = \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{\ln(1+\delta)}^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt - \int_{\ln(1+\delta)}^{\delta} \frac{e^{-t}}{t} dt \right]. \end{aligned}$$

Так как второй интеграл стремится к нулю, когда $\delta \rightarrow 0$, отсюда следует:

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{1-e^{-t}} \right) dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,13)$$

Полагая здесь $z=1$ и вычитая полученное равенство из (1.3,13), находим:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{1-e^{-t}} dt, \quad R(z) > 0, \quad (1.3,14)$$

или, если ввести новую переменную интегрирования $x = e^{-t}$:

$$\psi(z) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-x^{z-1}}{1-x} dx, \quad R(z) > 0. \quad (1.3,15)$$

Из формулы (1.3,15) можно вывести новое важное представление для $\psi(z)$ в виде аналитического выражения, имеющего смысл при любых значениях $z \neq 0, -1, -2, \dots$, т. е. во всей области, где определена эта функция. Это представление получается, если разложить $(1-x)^{-1}$ в ряд по возрастающим степеням x и выполнить затем почленное интегрирование, что допустимо ввиду равномерной сходимости ряда. Мы имеем тогда:

$$\psi(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right). \quad (1.3,16)$$

Ряд (1.3,16), члены которого суть регулярные при $z \neq 0, -1, -2, \dots$ функции, сходится равномерно относи-

*

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], н° 458.

тельно z в круге $|z| < a$ произвольно большого радиуса a , так как, для $n \geq N > a$,

$$\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+z} \right| < \frac{a+1}{(n+1)(n-a)}$$

и ряд

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{a+1}{(n+1)(n-a)}$$

сходится.

Поэтому, за исключением произвольно малой окрестности полюсов $z=0, -1, -2, \dots$, левая и правая части равенства (1.3,16) суть регулярные функции и первоначальное ограничение $R(z) > 0$, при котором была доказана эта формула, можно отбросить, согласно принципу аналитического продолжения. Если заменить в (1.3,16) z на $(z+1)$, проинтегрировать полученный ряд между пределами $(0, z)$ и перейти затем от логарифмов к числам, то получится известное разложение гамма-функции в бесконечное произведение Вейерштрасса

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right), \quad (1.3,17)$$

которое, со своей стороны, может быть положено в основу теории рассматриваемой функции.

В заключение укажем на некоторые формулы, связанные с постоянной Эйлера γ , введенной выше.

Полагая в (1.3,12—13) $z=1$, имеем по определению:

$$\gamma = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+x} - e^{-x} \right) \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) e^{-t} dt. \quad (1.3,18)$$

Далее, из (1.3,10) следует:

$$\gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt, \quad (1.3,19)$$

откуда, интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^1 \ln t d(e^{-t}-1) + \int_1^{\infty} \ln t de^{-t} = \\ &= \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt - \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \end{aligned}$$

или, если заменить во втором интеграле t на $\frac{1}{t}$,

$$\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt. \quad (1.3,20)$$

§ 1.4. Асимптотическое представление гамма-функции для больших $|z|$

Для того чтобы описать поведение заданной функции $f(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ и $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, во многих случаях достаточно найти для нее выражение вида

$$f(z) = \varphi(z) [1 + r(z)], \quad (1.4,1)$$

где $\varphi(z)$ — некоторая функция более простой структуры, чем $f(z)$, а $r(z)$ в пределах рассматриваемого сектора плоскости комплексного переменного равномерно стремится к нулю, когда $|z| \rightarrow \infty$.

Формулы указанного типа носят название асимптотических представлений для функции $f(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$.

Из (1.4,1) следует, что отношение функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ стремится к единице при неограниченном возрастании $|z|$, т. е. вытекает асимптотическое равенство обеих функций:

$$f(z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\approx} \varphi(z), \quad \alpha \leq \arg z \leq \beta. \quad (1.4,2)$$

Оценка модуля остаточного члена $r(z)$ дает величину относительной ошибки, допускаемой при замене $f(z)$ на $\varphi(z)$ при больших, но конечных, $|z|$.

Более точное описание поведения функции $f(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$, чем то, которое дается формулой (1.4,1), может

быть получено, если удастся установить равенства

$$f(z) = \varphi(z) \left[\sum_{n=0}^N a_n z^{-n} + r_N(z) \right], \quad (1.4,3)$$

$$a_0 = 1, N = 0, 1, 2, \dots,$$

где $z^N r_N(z)$ равномерно стремится к нулю при $|z| \rightarrow \infty$, $\alpha \leq \arg z \leq \beta$, частным случаем которых, соответствующим $N=0$, является формула (1.4,1).

В таком случае пишут:

$$f(z) \approx \varphi(z) \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \alpha \leq \arg z \leq \beta, \quad (1.4,4)$$

и называют правую часть асимптотическим рядом для $f(z)$ при больших $|z|$.

Следует заметить, что в данном определении не содержится требования, чтобы рассматриваемый ряд сходиллся в обычном смысле, напротив, как правило, он оказывается расходящимся. Тем не менее полученный асимптотический ряд весьма полезен, так как, взяв конечное число членов, мы получим для достаточно больших $|z|$ сколь угодно точную аппроксимацию функции $f(z)$.

В настоящей книге читатель найдет большое число примеров асимптотических представлений и рядов различных функций (§ 1.4, 2.2, 3.2, 4.6, 4.14, 4.22, 5.11 и т. д.). Общая теория асимптотических рядов рассматривается в курсах анализа *).

Чтобы получить асимптотическое представление для гамма-функции $\Gamma(z)$, удобно начать с вывода соответствующей формулы для логарифма этой функции.

Предположим временно, что z есть комплексное число, вещественная часть которого положительна, и воспользуемся интегральным представлением (1.3,13).

*) См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 394—397; Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон [1], гл. 8.

Заменяя в этой формуле z на $z+1$, имеем тождественно:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} &= \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-tz}}{e^t-1} \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tz}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-tz} dt - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-tz} dt, \end{aligned}$$

или, на основании равенства (1.3,11),

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \ln z + \frac{1}{2z} - \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) e^{-tz} dt.$$

Интегрируя последнее равенство между пределами (1, z) и принимая во внимание, что

$$\ln \Gamma(z+1) = \ln \Gamma(z) + \ln z,$$

находим *):

$$\begin{aligned} \ln \Gamma(z) &= \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + 1 + \\ &+ \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{e^{-tz} - e^{-t}}{t} dt, \end{aligned} \quad (1.4,5)$$

где $R(z) > 0$.

Заметим, что функция

$$f(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{e^t-1} \right) \frac{1}{t}, \quad (1.4,6)$$

которая входит под знак интеграла, непрерывна при $t \geq 0$ и $f(0) = \frac{1}{12}$, в чем легко убедиться, разложив $f(t)$ в степенной ряд в окрестности точки $t=0$.

Чтобы упростить формулу (1.4,5), необходимо вычислить значение интеграла

$$I = \int_0^{\infty} f(t) e^{-t} dt. \quad (1.4,7)$$

*) Выбор пути интегрирования не имеет значения. Законность интегрирования под знаком интеграла вытекает из абсолютной сходимости.

Последнее может быть выполнено при помощи следующего искусственного приема.

Положим

$$J = \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{t}{2}} dt. \quad (1.4,8)$$

Тогда имеем:

$$J - I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} \left[f(t) - \frac{1}{2} f\left(\frac{t}{2}\right) \right] dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right) dt,$$

откуда:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} \left[f(t) e^{-t} + \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t} - \frac{1}{e^t - 1} \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} - \frac{e^{-t}}{2} \right] dt = \\ &= \int_0^{\infty} \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right) + \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{2t} \right] dt = \\ &= - \left. \frac{e^{-\frac{t}{2}} - e^{-t}}{t} \right|_0^{\infty} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-\frac{t}{2}}}{t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.4,9)$$

С другой стороны, полагая в (1.4,5) $z = \frac{1}{2}$, находим:

$$J - I = \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2}, \quad (1.4,10)$$

поэтому:

$$I = 1 - \frac{1}{2} \ln 2\pi. \quad (1.4,11)$$

Принимая во внимание полученный результат, мы можем представить формулу (1.4,5) в следующем виде:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \omega(z), \quad (1.4,12)$$

где

$$\omega(z) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-tz} dt, \quad R(z) > 0. \quad (1.4,13)$$

Пользуясь найденным выражением (1.4,12), нетрудно получить асимптотическое представление для $\Gamma(z)$. Предположим, что $|z| \gg 1$, $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$. Интеграл (1.4,13) остается при этом еще сходящимся, и, интегрируя по частям, мы находим:

$$\omega(z) = \frac{1}{z} \left[f(0) + \int_0^{\infty} f'(t) e^{-tz} dt \right]. \quad (1.4,14)$$

При возрастании t функция $f(t)$ монотонно убывает*), поэтому $f'(t) \leq 0$, $|f'(t)| = -f'(t)$ и мы имеем:

$$|\omega(z)| \leq \frac{1}{|z|} \left[f(0) - \int_0^{\infty} f'(t) dt \right] = \frac{2f(0)}{|z|},$$

т. е.

$$|\omega(z)| \leq \frac{1}{6|z|}, \quad |z| \gg 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1.4,15)$$

Потенцируя равенство (1.4,12), находим:

$$\Gamma(z) = e^{\left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + r(z)], \quad (1.4,16)$$

$$|z| \gg 1, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2},$$

где

$$r(z) = e^{\omega(z)} - 1.$$

*) Это непосредственно следует из разложения $f(t)$ на частные дроби

$$f(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 k^2},$$

которое может быть получено также элементарным образом. (См. Г. М. Фихтенгольц [1], п^о 501.)

Из оценки (1.4,15) следует:

$$|r(z)| \leq \frac{C}{|z|}, \quad (1.4,17)$$

где C — некоторая абсолютная постоянная.

Таким образом, формула (1.4,16) дает искомое асимптотическое представление $\Gamma(z)$ в секторе $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$, причем остаток $r(z)$ есть величина порядка $\frac{1}{z}$ при $|z| \rightarrow \infty$ *):

$$r(z) = O(z^{-1}). \quad (1.4,18)$$

Чтобы получить асимптотическое представление для гамма-функции, пригодное в других секторах плоскости комплексного переменного, воспользуемся формулой (1.2,2). Предположим, что $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \pi - \delta$, где δ — произвольно малое фиксированное положительное число. Тогда $\arg(-z) = \arg z - \pi$ и $-\frac{\pi}{2} \leq \arg(-z) \leq -\delta$. На основании (1.2,1—2) имеем:

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{(-z)\Gamma(-z)\sin \pi z}, \quad (1.4,19)$$

причем, согласно ранее выведенной формуле (1.4,16),

$$\Gamma(-z) = e^{-(z+\frac{1}{2})(\ln z - \pi i) + z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + O(z^{-1})]. \quad (1.4,20)$$

С другой стороны, в рассматриваемом секторе

$$\begin{aligned} \sin \pi z &= \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i} = -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} (1 - e^{2\pi iz}) = \\ &= -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} \left(1 - \frac{1}{z} \cdot ze^{2\pi iz}\right) = -\frac{e^{-i\pi z}}{2i} [1 + O(z^{-1})], \end{aligned} \quad (1.4,21)$$

так как $ze^{2\pi iz}$ ограничено.

Подставляя (1.4,20—21) в (1.4,19), приходим снова к формуле (1.4,16).

Аналогичный результат получается для сектора

$$-(\pi - \delta) \leq \arg z \leq -\frac{\pi}{2}.$$

*) $f(z)$ есть величина порядка $\varphi(z)$ при $z \rightarrow z_0$, $f(z) = O\{\varphi(z)\}$, если в окрестности z_0 выполняется неравенство $|f(z)| \leq A|\varphi(z)|$, где A — некоторая постоянная.

Таким образом, для любых $|z| \gg 1$, $|\arg z| \leq \pi - \delta$ имеет место асимптотическое представление:

$$\Gamma(z) = e^{(z-\frac{1}{2})\ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} [1 + O(z^{-1})]. \quad (1.4,22)$$

Путем некоторого усложнения приведенных выше рассуждений можно вывести более точную формулу:

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= e^{(z-\frac{1}{2})\ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi} \left[1 + \frac{1}{12z} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} + O(z^{-4})\right]. \end{aligned} \quad (1.4,23)$$

Если $z = x$ — вещественное положительное число, то формула (1.4,16) может быть записана в виде

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} [1 + r(x)], \quad (1.4,24)$$

и для $r(x)$ получается более точная оценка, чем та, которая дается неравенством (1.4,17). Действительно, при $z = x > 0$ мы имеем:

$$|\omega(x)| \leq f(0) \int_0^{\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{12x}, \quad (1.4,25)$$

откуда следует:

$$|r(x)| \leq e^{\frac{1}{12x}} - 1. \quad (1.4,26)$$

В заключение укажем на асимптотическую формулу для факториала $n!$, которая непосредственно вытекает из формул (1.4,25) и (1.2,4):

$$\begin{aligned} n! &\approx \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}, \\ n &\rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (1.4,27)$$

§ 1.5. Определенные интегралы, связанные с гамма-функцией

Класс интегралов, которые могут быть выражены через гамма-функцию, очень обширен и мы ограничимся здесь лишь немногочисленными примерами, имея в виду главным образом получить некоторые формулы, необходимые в различных разделах настоящей книги.

Одной из наиболее простых и важных формул этого типа является равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} t^{z-1} dt = \frac{\Gamma(z)}{p^z}, \quad (1.5,1)$$

где $R(p) > 0$, $R(z) > 0$, которое легко доказывается для положительных p , если произвести замену переменной интегрирования, положив $s = pt$, и затем воспользоваться интегральным представлением (1.1,1). Распространение полученного результата на любые комплексные значения p , вещественная часть которых положительна, осуществляется с помощью принципа аналитического продолжения.

В качестве второго важного интеграла, который может быть выражен через гамма-функцию, рассмотрим интеграл

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad R(x) > 0, \quad R(y) > 0, \quad (1.5,2)$$

известный в литературе под названием бета-функции.

Легко видеть, что при указанном ограничении интеграл (1.5,2) сходится и представляет собой регулярную функцию каждого из переменных x и y .

Если ввести новое переменное интегрирования $u = \frac{t}{1-t}$, то для бета-функции получается новое выражение:

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du, \quad R(x) > 0, \quad R(y) > 0. \quad (1.5,3)$$

Воспользуемся теперь формулой (1.5,1) и положим в ней $p = 1 + u$, $z = x + y$. Тогда находим:

$$\frac{1}{(1+u)^{x+y}} = \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-(1+u)t} t^{x+y-1} dt, \quad (1.5,4)$$

откуда, после подстановки в (1.5,3) и перемены порядка интегрирования, получается:

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{1}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x+y-1} dt \int_0^{\infty} e^{-ut} u^{x-1} du = \\ &= \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+y)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \end{aligned} \quad (1.5,5)$$

Законность перестановки обосновывается путем доказательства абсолютной сходимости двойного интеграла. Таким образом, связь функции бета с функцией гамма устанавливается формулой

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (1.5,6)$$

пользуясь которой легко вывести все свойства $B(x, y)$.

§ 1.6. Таблицы гамма-функции

Для функции $\Gamma(x)$ и связанных с ней функций существует большое число различных таблиц, из которых мы назовем, в качестве наиболее доступных и подробных, следующие таблицы.

1. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы. Изд. АН СССР (1948):

$$\begin{array}{ll} \Gamma(x), & x = 1 (0,001) 2, \\ \Gamma(n+1), & n = 1 (1) 50. \end{array}$$

(Употребленная выше сокращенная запись обозначает, что аргумент x изменяется от 1 до 2 с интервалом в 0,001).

2. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$$\begin{array}{ll} \Gamma(x+1), & x = 0 (0,01) 4 \} \\ \psi(x+1), & x = 0 (0,01) 1 \} \end{array} \quad 4 \text{ зн.}$$

3. Я. Н. Шпильерейн, Таблицы специальных функций. Гостехиздат (1933):

$$\Gamma(x), \quad x = 1 (0,002) 2, \quad 5 \text{ зн.}$$

4. К. Хайяши (K. Hayashi), Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin (1930):

$$\Gamma(x), \quad x = -5 (0,01) 1 (0,001) 2 (0,01) 5, \quad 5 \text{ зн.}$$

5. British Association Mathematical Tables, vol. 1. Cambridge (1946):

$$\begin{array}{ll} \psi(x+1), & x = 0 (0,01) 1, \} \\ & x = 10 (0,1) 60 \} \end{array} \quad 12 \text{ зн.}$$

Библиографические сведения о других таблицах гамма-функции можно найти в монографии Флетчера, Миллера и Розенхеда [1], содержащей весьма полное описание таблиц специальных функций, изданных до 1943 г.

Упражнения

1. Доказать, что при вещественном t

$$|\Gamma(it)|^2 = \frac{\pi}{t \operatorname{sh} \pi t}, \quad \left| \Gamma\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi t}.$$

2. Воспользовавшись (1.5,6), проверить справедливость формул:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} 2yt}{(\operatorname{ch} t)^{2x}} dt = 2^{2x-1} \frac{\Gamma(x+y) \Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)},$$

$$R(x) > 0, \quad R(x) > |R(y)|;$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

3. Получить функциональное соотношение

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-\frac{1}{2}}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right)$$

(В. И. Смирнов [1], стр. 271—272).

4. Воспользовавшись асимптотической формулой для гамма-функции, показать, что при любом a

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} e^{-a \ln z} = 1.$$

5. Вывести формулу:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + 2 \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{z}}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad R(z) > 0$$

(Уиттекер и Ватсон [1], стр. 24—25).

6. Получить интегральное представление для квадрата гамма-функции

$$\Gamma^2(z) = 2^{2z-1} \int_0^{\infty} t^{2z-1} K_0(t) dt, \quad R(z) > 0,$$

где $K_0(t)$ — функция Макдональда (§ 5.7).

Указание. Воспользоваться формулами (5.10,25), (1.5,1) и интегралом примера 2.

7. При помощи контурного интегрирования показать, что для любых значений комплексного переменного z справедливо интегральное представление

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t-z} dt,$$

где $t^{-z} = e^{-z \ln t}$, $-\pi < \arg t < \pi$ и контур C состоит из отрезков $(-\infty, -a)$, $(-\infty, -a)$ нижнего и верхнего берегов разреза $(-\infty, 0)$ и замыкающей их дуги круга $|t| = a$ произвольного радиуса a (Смирнов [1], стр. 275).

ЛИТЕРАТУРА к ГЛАВЕ I

- Смирнов В. И. [1], Кузьмин Р. О. [1], Уиттекер и Ватсон [1], Нильсен [1].
Справочники: Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1],
Магнус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА II

ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Интеграл вероятности и его основные свойства

Интегралом вероятности $\Phi(z)$ называется функция, которая для любых комплексных z определяется при помощи равенства

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (2.1,1)$$

где интегрирование производится по произвольному пути, соединяющему начало координат с точкой $t=z$. Так как подынтегральное выражение является целой функцией комплексного переменного t , вид пути интегрирования не играет роли и можно считать, что интегрирование производится вдоль отрезка прямой, соединяющей точки $t=0$ и $t=z$. По известной теореме $\Phi(z)$ представляет целую функцию, которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся при любых значениях переменного z *). Для того, чтобы получить это разложение, достаточно подставить в (2.1, 1)

*) Интеграл $\varphi(z) = \int_a^z f(t) dt$, взятый по произвольному пути, принадлежащему односвязной области D , в которой $f(t)$ регулярна, есть регулярная функция в этой области. См., например, В. И. Смирнов [1], стр. 25 и 27—28. Теорема справедлива и в том случае, когда $f(a) = \infty$ или $a = \infty$, при условии, что несобственный интеграл сходится.

соответствующий ряд для показательной функции и проинтегрировать его почленно. Мы находим тогда

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{n! (2n+1)}, \quad |z| < \infty, \quad (2.1,2)$$

так как процесс интегрирования степенного ряда является законным. Из формулы (2.1,2) следует, что $\Phi(z)$ — нечетная

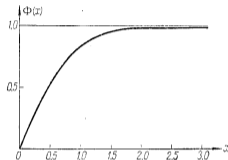


Рис. 1.

функция от z . При вещественных значениях аргумента $\Phi(z)$ представляет собой вещественную монотонно возрастающую функцию, график которой изображен на рис. 1.

Значение функции при нуле $\Phi(0) = 0$, а при возрастании z быстро приближается к предельному значению $\Phi(\infty) = 1$, ибо

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (2.1,3)$$

Разница между $\Phi(z)$ и этим предельным значением может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (2.1,4)$$

Интеграл вероятности встречается в различных вопросах прикладной математики, в частности, в теории вероятностей и теории ошибок, в математической теории теплопроводности и в других разделах математической физики (§ 2.5—2.6). В литературе наряду с интегралом вероятности $\Phi(z)$ часто рассматриваются родственные ему функции, именно функция ошибок

$$\operatorname{Erf}(z) = \int_0^z e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Phi(z),$$

и ее дополнение

$$\operatorname{Erfc}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(z)].$$

Многие интегралы более сложного вида также могут быть выражены через интеграл вероятности. Так, например, методом дифференцирования по параметру, легко показать, что для $z > 0$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-zt^2}}{1+t^2} dt = e^{-z} [1 - \Phi(\sqrt{z})].$$

§ 2.2. Асимптотическое представление для интеграла вероятности при больших значениях $|z|$

Для того чтобы получить асимптотическое представление функции $\Phi(z)$ при больших значениях $|z|$, воспользуемся формулой (2.1,4) и преобразуем входящий в нее интеграл с помощью интегрирования по частям.

Мы находим последовательно:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty e^{-t^2} dt &= \frac{e^{-z^2}}{2z} - \frac{1}{2} \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt = \frac{e^{-z^2}}{2z} - \frac{e^{-z^2}}{2^2 z^3} + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2^2} \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^4} dt = e^{-z^2} \left[\frac{1}{2z} - \frac{1}{2^2 z^3} + \frac{1 \cdot 3}{2^3 z^5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 z^7} + \dots \right. \\ &\left. \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} z^{2n+1}} \right] + \end{aligned}$$

$$\dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1}} \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt,$$

откуда следует:

$$1 - \Phi(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2^k)^k} + r_n(z) \right], \quad (2.2,1)$$

где

$$r_n(z) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n} z e^{z^2} \int_z^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^{2n+2}} dt. \quad (2.2,2)$$

Предположим, что $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, где δ — произвольное малое положительное число, и выберем в качестве пути интегрирования в (2.2,2) полупрямую, начинающуюся в точке $t = z$ и параллельную вещественной оси. Полагая $z = x + iy = u + iv$, мы имеем, что на рассматриваемой прямой $t = u + iy$ ($x \leq u < \infty$),

$$|e^{z^2 - t^2}| = e^{x^2 - u^2}, \quad |t|^{-(2n+3)} \leq |z|^{-(2n+3)}, \quad |t| \leq u \sec \varphi,$$

поэтому из оценки по модулю следует:

$$|r_n(z)| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n |z|^{2n+2}} \int_x^\infty e^{-x^2 - u^2} u du = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1}} \sec \varphi.$$

Таким образом, имеем:

$$|r_n(z)| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1}} \sec \varphi \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{(2|z|^2)^{n+1}} \sec \delta. \quad (2.2,3)$$

Полученный результат показывает, что произведение $z^{2n} r_n(z)$ в рассматриваемом секторе равномерно стремится к нулю, когда $|z| \rightarrow \infty$, т. е. ряд, стоящий в правой части равенства

$$1 - \Phi(z) \approx \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z} \left[1 + \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2^k)^k} \right],$$

$$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (2.2,4)$$

является асимптотическим для функции $1 - \Phi(z)$ (§ 1.4). Величина ошибки, которая допускается, если аппроксимировать рассматриваемую функцию суммой $(n+1)$ первых членов данного ряда, выражается формулой (2.2,3), причем

для каждого z существует свое оптимальное значение n , для которого ошибка будет наименьшей. Для вещественных положительных z ошибка не превосходит величины первого отброшенного члена.

Асимптотическое представление для интеграла вероятности в секторе $\frac{\pi}{2} + \delta \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2} - \delta$ может быть получено из (2.2,1) с помощью соотношения $\Phi(z) = -\Phi(-z)$.

Построение асимптотического представления для сектора $\frac{\pi}{2} - \delta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} + \delta$ требует отдельного рассуждения (ср. 2.3,5).

§ 2.3. Интеграл вероятности от мнимого аргумента. Функция $F(z)$

В приложениях, наряду с интегралом вероятности от вещественного аргумента, встречаются также случаи, когда аргумент функции представляет комплексное число. Одним из наиболее простых и интересных среди них является случай чисто мнимого аргумента $z = ix$, x — вещественно. Воспользовавшись определением интеграла вероятности (2.2,1) и выбрав в качестве пути интегрирования отрезок мнимой оси, получим после подстановки $t = iu$:

$$\frac{\Phi(ix)}{i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du. \quad (2.3,1)$$

Интеграл в правой части неограниченно возрастает при $x \rightarrow \infty$, поэтому в приложениях более удобным является рассматривать функцию

$$F(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{u^2} du, \quad (2.3,2)$$

которая остается ограниченной при любых вещественных z (2.3,5). В общем случае комплексных z функция $F(z)$, определенная равенством (2.3,2), будет целой, и выбор пути интегрирования в (2.3,2) является вполне произвольным. Для того чтобы получить разложение этой функции в сте-

пенной ряд, заметим, что $F(z)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$F'(z) + 2zF(z) = 1 \quad (2.3,3)$$

с начальным условием $F(0) = 0$. Подставляя в это уравнение ряд $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, получаем путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z рекуррентные соотно-

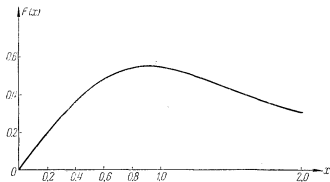


Рис. 2.

шения $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $(n+1)a_{n+2} + 2a_{n-1} = 0$, откуда после простых вычислений находим:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n/2} z^{2n+1}}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}, \quad |z| < \infty. \quad (2.3,4)$$

Для оценки поведения $F(z)$ при вещественных $z \rightarrow \infty$ можно воспользоваться правилом Лопитала, повторное применение которого к (2.3,2) дает $\lim_{z \rightarrow \infty} 2zF(z) = 1$, откуда следует асимптотическая формула:

$$F(z) \approx \frac{1}{2z}, \quad z \rightarrow \infty. \quad (2.3,5)$$

График функции $F(z)$ для вещественных $z \geq 0$ изображен на рис. 2.

Максимум функции достигается при $z = 0,924\dots$ и равен $F_{\max} = 0,541\dots$.

Функция $F(z)$ встречается в теории распространения электромагнитных волн вдоль земной поверхности и в других задачах математической физики.

§ 2.4. Интеграл вероятности от аргумента $x\sqrt{i}$. Интегралы Френеля

Другой интересный с точки зрения приложений случай представляет собой интеграл вероятности с комплексным аргументом $z = x\sqrt{i} = \frac{x}{\sqrt{2}}(1+i)$, x — вещественное положительное число. Выбирая в качестве пути интегрирования в (2.1,1) отрезок биссектрисы координатного угла и вводя новое вещественное переменное u по формуле $t = u\sqrt{i}$, мы можем представить значение интеграла вероятности для этого случая в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x\sqrt{i})}{\sqrt{i}} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-iu^2} du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \cos u^2 du - i \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sin u^2 du. \end{aligned} \quad (2.4,1)$$

Интегралы в правой части могут быть выражены через функции

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad (2.4,2)$$

где интегрирование производится по любому пути, соединяющему начало координат с точкой $t=z$.

Функции $C(z)$ и $S(z)$ называются интегралами Френеля. Так как подинтегральные выражения в (2.4,2) суть целые функции комплексного переменного t , выбор пути интегрирования не имеет значения, и обе функции $C(z)$ и $S(z)$ представляют собой целые функции от z . При вещественном z интегралы Френеля вещественны. Графики этих функций для этого случая изображены на рис. 3. Обе функции

обращаются в нуль при $z=0$ и имеют колебательный характер*). Наибольшие из максимумов будут соответственно

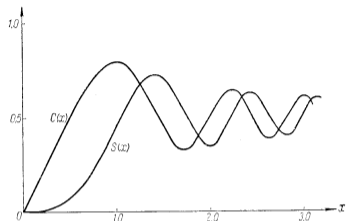


Рис. 3.

$C(1) = 0,779893$, $S(\sqrt{2}) = 0,713972\dots$ При $z \rightarrow +\infty$ каждая из функций стремится к пределу:

$$C(+\infty) = S(+\infty) = \frac{1}{2},$$

так как, на основании известных формул**),

$$\int_0^{\infty} \cos t^2 dt = \int_0^{\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad (2.4,3)$$

Разлагая тригонометрические функции, стоящие под знаком интегралов (2.4,2), в степенные ряды и интегрируя их

*) Производные рассматриваемых функций выражаются формулами

$$C'(z) = \cos \frac{\pi z^2}{2}, \quad S'(z) = \sin \frac{\pi z^2}{2},$$

поэтому $C(z)$ имеет экстремумы в точках $z = \pm \sqrt{2n+1}$, $S(z)$ — в точках $z = \pm \sqrt{2n}$ ($n=0, 1, 2\dots$).

**) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], н° 484.

почленно, получаем представления для интегралов Френеля в виде рядов, сходящихся при любых значениях z :

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{z^{4n+1}}{4n+1}, \\ S(z) &= \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2n+1} dt = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{z^{4n+3}}{4n+3}, \end{aligned} \right\} (2.4,4)$$

$|z| < \infty.$

Связь интегралов Френеля с интегралом вероятности устанавливается формулами:

$$\begin{aligned} C(z) \pm iS(z) &= \int_0^z e^{\pm i \frac{\pi t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{\mp \frac{i\pi}{2}}} \int_0^{\sqrt{\mp \frac{i\pi}{2}} z} e^{-u^2} du = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Phi\left(\sqrt{\mp \frac{i\pi}{2}} z\right)}{\sqrt{\mp \frac{i\pi}{2}}}, \end{aligned} \quad (2.4,5)$$

откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left[\frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{-i\pi}{2}} z\right)}{\sqrt{\frac{-i\pi}{2}}} + \frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{i\pi}{2}} z\right)}{\sqrt{\frac{i\pi}{2}}} \right], \\ S(z) &= \frac{\sqrt{\pi}}{4i} \left[\frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{-i\pi}{2}} z\right)}{\sqrt{\frac{-i\pi}{2}}} - \frac{\Phi\left(\sqrt{\frac{i\pi}{2}} z\right)}{\sqrt{\frac{i\pi}{2}}} \right]. \end{aligned} \right\} (2.4,6)$$

Пользуясь найденными соотношениями, можно вывести свойства рассматриваемых функций из соответствующих свойств интеграла вероятности. В частности, воспользовавшись результатами § 2.2, получаем следующие асимптотиче-

ские представления интегралов Френеля, пригодные для больших значений $|z|$ и $|\arg z| \leq \frac{\pi}{4} - \delta$:

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \left[B(z) \cos \frac{\pi z^2}{2} - A(z) \sin \frac{\pi z^2}{2} \right], \\ S(z) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi z} \left[A(z) \cos \frac{\pi z^2}{2} + B(z) \sin \frac{\pi z^2}{2} \right], \end{aligned} \right\} (2.4,7)$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \alpha_{2k}}{(\pi z^2)^{2k}} + O(z^{-4N-4}), \\ B(z) &= \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k \alpha_{2k+1}}{(\pi z^2)^{2k+1}} + O(z^{-4N-6}), \\ \alpha_k &= 1 \cdot 3 \dots (2k-1), \quad \alpha_0 = 1. \end{aligned}$$

Интегралы Френеля встречаются в различных областях физики и техники, например в теории дифракции, теории поперечных колебаний стержня и т. д. Многие интегралы более сложного вида могут быть выражены через функции $C(z)$ и $S(z)$ *).

§ 2.5. Приложение к теории вероятностей

Пусть x — случайная величина, отклонение которой от среднего значения \bar{x} подчинено закону Гаусса, т. е. вероятность появления отклонений, лежащих в интервале $(x - \bar{x}, x - \bar{x} + dx)$ выражается формулой

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx, \quad (2.5,1)$$

где σ — некоторая постоянная, называемая стандартным отклонением **).

* См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн [1].

** См., например, Уиттекер и Робинсон [1].

Если известны результаты n измерений величины x : x_1, x_2, \dots, x_n (n — большое число), то значения постоянных \bar{x} и σ могут быть вычислены по формулам:

$$\bar{x} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma^2 \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Тогда вероятность того, что отклонение $x - \bar{x}$ будет находиться в интервале (α, β) , дается равенством

$$W(\alpha < x - \bar{x} < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha + \bar{x}}^{\beta + \bar{x}} e^{-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} dx = \\ = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}}^{\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \left[\Phi\left(\frac{\beta}{\sigma\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right], \quad (2.5,2)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

В частности, если $\alpha = -\infty$, $\beta = \infty$, то $W = 1$, как и следовало ожидать.

Полагая $\alpha = -\delta$, $\beta = \delta$, получаем вероятность того, что отклонение $x - \bar{x}$ по абсолютному значению не превосходит заданной величины δ :

$$W(|x - \bar{x}| \leq \delta) = \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right). \quad (2.5,3)$$

Тогда вероятность того, что отклонение по абсолютному значению больше δ , будет:

$$W(|x - \bar{x}| > \delta) = 1 - \Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\sqrt{2}}\right). \quad (2.5,4)$$

Значение $\delta = \delta_{0.9}$, для которого

$$W(|x - \bar{x}| \leq \delta) = W(|x - \bar{x}| > \delta),$$

называется вероятной ошибкой.

Из (2.5,3—4) следует, что значение этой величины определяется уравнением

$$\Phi\left(\frac{\delta_{0.9}}{\sigma\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2},$$

откуда, воспользовавшись таблицами для интеграла вероятности, находим:

$$\delta_{0.9} = 0,67449\sigma.$$

В виде примера приложения этих формул вычислим вероятность того, что длина детали, изготавливаемой на авто-

мате и имеющей среднюю длину 10 см, со стандартным отклонением $\sigma = 1$ мм, отклоняется от средней не более чем на 1 мм.

Мы имеем

$$W(|x - 10| \leq 0,1) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0,683,$$

т. е. такое отклонение будет у 68% изготавливаемых деталей. Вероятная ошибка составляет в данном случае $\approx 0,7$ мм.

§ 2.6. Приложение к теории теплопроводности. Остывание плоской поверхности неограниченного нагретого тела

Рассмотрим задачу теории теплопроводности об охлаждении неограниченного тела, заполняющего полупространство $x > 0$, нагретого до температуры T_0 и излучающего тепло с своей поверхности $x = 0$ в окружающую среду, находящуюся при нулевой температуре.

Если обозначить через $T = T(x, t)$ температуру в произвольной точке x тела в момент времени t и положить $\tau = \frac{kt}{c\rho}$, $h = \frac{\lambda}{k}$, где k , c и ρ — коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность тела, λ — коэффициент теплоотдачи, то рассматриваемая задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.6,1)$$

при начальном условии

$$T|_{\tau=0} = T_0 \quad (2.6,2)$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial T}{\partial x} - hT|_{x=0} = 0, \quad T|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow T_0. \quad (2.6,3)$$

Решение задачи легко получается путем применения преобразования Лапласа*). Идея этого метода состоит в том,

*) См., например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1], гл. VI.

что вместо T ищется сперва преобразование Лапласа от этой функции \bar{T} , связанное с T соотношением

$$\bar{T} = \int_0^{\infty} T e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.6,4)$$

где p — надлежаще выбранное комплексное число.

Уравнения для определения $\bar{T} = \bar{T}(x, p)$ получаются из исходных уравнений (2.6,1—3), если умножить первое и третье из этих уравнений на $e^{-p\tau}$ и проинтегрировать по промежутку $(0, \infty)$.

Мы находим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} &= p \bar{T} - T_0, \\ \frac{d\bar{T}}{dx} - h \bar{T} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \bar{T} \Big|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{T_0}{p}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6,5)$$

откуда после простых вычислений имеем:

$$\bar{T} = \frac{T_0}{p} \left[1 - \frac{h}{h + \sqrt{p}} e^{-x\sqrt{p}} \right], \quad (2.6,6)$$

где $R(\sqrt{p}) > 0$ при $R(p) > 0$.

Решение задачи получается теперь обращением равенства (2.6,4), что может быть выполнено с помощью существующих таблиц, содержащих преобразования Лапласа различных функций*), или путем применения формулы обращения Римана—Меллина

$$T = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \bar{T} e^{p\tau} dp, \quad (2.6,7)$$

где интегрирование производится по прямой (L) , параллельной мнимой оси и выбранной таким образом, чтобы особые точки \bar{T} лежали слева от нее.

Наибольший интерес представляет вычисление температуры поверхности тела.

Полагая в (2.6,6) $x=0$, мы имеем:

$$\bar{T} \Big|_{x=0} = \frac{T_0}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+h)} = T_0 \left[\frac{1}{p-h^2} - \frac{h}{p-h^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}} \right], \quad (2.6,8)$$

*) См., например, В. А. Диткин и П. И. Кузнецов [1].

и переход к первичной функции $T \Big|_{x=0}$ осуществляется проще всего с помощью теоремы умножения**).

Выбирая $\bar{f}_1 = \frac{h}{\sqrt{p}}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{p-h^2}$, находим из таблиц $f_1(\tau) = \frac{h}{\sqrt{\pi\tau}}$, $f_2(\tau) = e^{h^2\tau}$, и применение этой теоремы даст:

$$\begin{aligned} T \Big|_{x=0} &= T_0 \left[e^{h^2\tau} - \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} e^{h^2(\tau-t)} \frac{dt}{\sqrt{t}} \right] = \\ &= T_0 e^{h^2\tau} \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{h\sqrt{\tau}} e^{-s^2} ds \right], \end{aligned}$$

откуда

$$T \Big|_{x=0} = T_0 e^{h^2\tau} [1 - \Phi(h\sqrt{\tau})], \quad (2.6,9)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Из асимптотической формулы (2.2,1) следует, что спадающая температура поверхности при больших x пропорционально $\tau^{-\frac{1}{2}}$:

$$T \Big|_{x=0} \approx \frac{T_0}{h\sqrt{\pi\tau}}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (2.6,10)$$

Значение температуры в любой точке тела также может быть выражено в замкнутой форме через интеграл вероятности.

§ 2.7. Приложение к теории колебаний. Поперечные колебания бесконечного стержня под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы

Предположим, что в точке $x=0$ бесконечного стержня в момент $t=0$ внезапно приложена сила Q , значение которой в дальнейшем остается постоянным.

*) Эта теорема утверждает, что если $\bar{f}_1, \bar{f}_2 (v=1, 2)$ — преобразование Лапласа от функций $f_i(\tau)$, то первичная функция для $\bar{f} = \bar{f}_1 \bar{f}_2$ будет

$$f(\tau) = \int_0^{\tau} f_1(t) f_2(\tau-t) dt.$$

(Лаврентьев и Шабат [1], стр. 412).

Если обозначить через ρ , E , I плотность на единицу длины стержня, модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения стержня, то смещение u в произвольной точке $x > 0$ определится из уравнений *)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + \frac{\partial u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau}|_{\tau=0} = 0, \quad (2.7,1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}|_{x=0} = \frac{Q}{2EI}, \quad u|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где переменное τ пропорционально времени t , $\tau = \sqrt{\frac{EI}{\rho}} t$.

Решение задачи может быть найдено путем применения преобразования Лапласа (§ 2.6). Полагая

$$\bar{u} = \int_0^{\infty} u e^{-p\tau} d\tau, \quad (2.7,2)$$

получаем для определения \bar{u} уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^4 \bar{u}}{dx^4} + p^2 \bar{u} &= 0, \\ \frac{d\bar{u}}{dx}|_{x=0} &= 0, \quad \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2}|_{x=0} = \frac{Q}{2EI}, \\ \bar{u}|_{x \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad \frac{d\bar{u}}{dx}|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7,3)$$

откуда после несложных вычислений следует:

$$\bar{u} = \frac{Q}{4EI\rho^2 i} \left[\frac{e^{-x\sqrt{-\rho i}}}{\sqrt{-\rho i}} - \frac{e^{-x\sqrt{\rho i}}}{\sqrt{\rho i}} \right], \quad (2.7,4)$$

где $R(\sqrt{\pm \rho i}) > 0$ при $R(p) > 0$.

Для отыскания u по известному \bar{u} удобно воспользоваться теоремой умножения.

*) См., например, А. И. Лурье [1].

Полагая

$$\bar{f}_1 = \frac{Q}{2EI\rho^2}, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-x\sqrt{-\rho i}}}{\sqrt{-\rho i}} - \frac{e^{-x\sqrt{\rho i}}}{\sqrt{\rho i}} \right],$$

находим с помощью таблиц *)

$$f_1 = \frac{Q}{2EI} \tau, \quad f_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\sin \frac{x^2}{4\tau} + \cos \frac{x^2}{4\tau} \right],$$

откуда, на основании указанной теоремы,

$$u = \frac{Q}{2EI\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tau} \left(\sin \frac{x^2}{4t} + \cos \frac{x^2}{4t} \right) \frac{\tau-t}{\sqrt{t}} dt = \frac{Qx\tau}{2EI} f\left(\frac{x}{2\sqrt{\tau}}\right), \quad (2.7,5)$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} (\sin y^2 + \cos y^2) \frac{1-y^2}{y^2} dy. \quad (2.7,6)$$

Функция $f(x)$ может быть выражена через интегралы Френеля $C(z)$ и $S(z)$ (§ 2.4).

Применяя дважды формулу интегрирования по частям, находим:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{2}{3}x^2\right) \left[\frac{1}{2} - C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)\right] - \\ &\quad - \left(1 - \frac{2}{3}x^2\right) \left[\frac{1}{2} - S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)\right] + \\ &\quad + \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \left[(1+x^2) \frac{\sin x^2}{x} + (-x^2) \frac{\cos x^2}{x} \right]. \end{aligned} \quad (2.7,7)$$

§ 2.8. Таблицы интеграла вероятности и родственных ему функций

Интеграл вероятности $\Phi(x)$ принадлежит к числу хорошо табулированных функций. Укажем, например, на следующие таблицы **):

*) В. А. Диткин и П. И. Кузнецов [1].

**) По поводу принятой системы обозначений см. § 1.6.

1. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы. Изд. АН СССР (1948):

$$\Phi(x), \quad x=0(0,001)2,5(0,01)3.$$

2. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$$\Phi(x), \quad x=0(0,01)3, \quad 4 \text{ зн.}$$

3. Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций. Гостехиздат (1933):

$$\Phi(x), \quad x=0(0,001)2,9, \quad 4 \text{ зн.}$$

4. К. Хайяши (K. Hayashi), Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin (1930):

$$\Phi(x), \quad x=0(0,01)3.$$

5. Mathematical Tables Project of the Work Projects Administration for the City of New York, Tables of Probability functions, vol. I (1941).

$$\Phi(x), \quad x=0(0,0001)1(0,001)5,6, \quad 15 \text{ зн.}$$

$$1 - \Phi(x), \quad x=4(0,01)10, \quad 8 \text{ зн.}$$

Значения функции $F(x)$ (§ 2.3) можно найти в таблицах:

6. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$$F(x)e^{x^2}, \quad x=0(0,01)2, \quad 4 \text{ зн.}$$

7. Г. М. Террилл и Л. Свенни (H. M. Terrill and L. Swenny), Journal of Franklin Institute, **237**, 495—497 (1944); **238**, 220—222 (1944).

$$F(x)e^{x^2}, \quad x=0(0,01)2, \quad 6 \text{ зн.}$$

8. Миллер, Лаш и Гордон (Miller, W. Lasch and A. R. Gordon), Journal Phys. Chem., **35**, 2785—2884 (1931).

$$F(x), \quad x=0(0,01)4(0,05)7,5(0,1)10(0,2)12, \quad 6-9 \text{ зн.}$$

Из таблиц специальных функций, содержащих интегралы Френеля, могут быть отмечены следующие:

9. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x=0(0,1)1(0,5)50, \quad 4 \text{ зн.}$$

10. Г. Н. Ватсон [1].

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x=0(0,02)1(0,5)50, \quad 6 \text{ зн.}$$

11. К. Хайяши (K. Hayashi), Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin (1930):

$$C\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad S\left(\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\right), \quad x=0(0,02)1(0,5)50, \quad 5 \text{ зн.}$$

12. Ван Вингарден и Шин (A. Van Wijngaarden and W. L. Scheen), Tables of Fresnel Integrals. Amsterdam (1949):

$$C(x), \quad S(x), \quad x=0(0,01)20. \quad 5 \text{ зн.}$$

Библиографические сведения о других таблицах читатель может найти в монографии Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

Упражнения

1. Показать, что функция $\varphi(z) = \frac{\sqrt{z}}{2} e^{-z^2} \Phi(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\varphi' - 2z\varphi = 1$, и получить отсюда разложение

$$\Phi(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z^2)^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}, \quad |z| < \infty.$$

2. Воспользовавшись результатом примера 1 и формулой (2.4,5), вывести разложения интегралов Френеля:

$$C(x) = x \left[\alpha(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} + \beta(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

$$S(x) = x \left[\alpha(x) \sin \frac{\pi x^2}{2} - \beta(x) \cos \frac{\pi x^2}{2} \right],$$

где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k}}{1 \cdot 3 \dots (4k+1)}, \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\pi x^2)^{2k+1}}{1 \cdot 3 \dots (4k+3)}.$$

3. Интегрируя по частям, доказать, что

$$\int \Phi(x) dx = x \Phi(x) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + C.$$

4. Показать, что если \bar{f} — преобразование Лапласа от функции $f(x)$:

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f(x) e^{-px} dx,$$

то

$$\bar{\Phi} = \frac{e^{\frac{p^2}{4}}}{p} \left[1 - \Phi\left(\frac{p}{2}\right) \right].$$

5. Получить интегральное представление для квадрата интеграла вероятности:

$$\Phi^2(z) = 1 - \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-z^2(1+u^2)}}{(1+u^2)} du.$$

Указание. Представить левую часть в виде двойного интеграла, взятого по квадрату $0 \leq s \leq z$, $0 \leq t \leq z$, и перейти к полярным координатам.

6. Показать, что

$$C(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi x^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) dx, \quad S(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi x^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) dx,$$

где $J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя порядка ν (§ 5.8).

ЛИТЕРАТУРА к ГЛАВЕ II

Нильсен [2], Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1],
Магнус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА III ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 3.1. Интегральная показательная функция и ее основные свойства

Интегральная показательная функция $Ei(z)$ определяется как интеграл

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt, \quad (3.1.1)$$

взятый по произвольному пути L в плоскости t , разрезанной вдоль положительной вещественной оси (рис. 4).

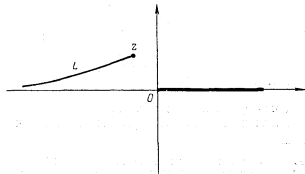


Рис. 4.

В полученной таким образом односвязной области подинтегральное выражение представляет регулярную функцию комплексного переменного t , поэтому значение интеграла

не зависит от вида пути и, в соответствии с общей теоремой, $Ei(z)$ является регулярной функцией z^*).

В частном случае, когда z — отрицательное вещественное число, $z = -x$ ($x > 0$), можно считать, что интегрирование в (3.1,1) производится вдоль вещественной оси и функция

$Ei(-x)$ будет вещественной. Вводя новое переменное интегрирования, мы можем представить эту функцию интегралом

$$Ei(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, \quad x > 0. \quad (3.1,2)$$

График функции $-Ei(-x)$ изображен на рис. 5. Рассматриваемая функция монотонно убывает от значения $-Ei(0) = +\infty$ до значения $Ei(+\infty) = 0^{**}$.

Для того чтобы получить разложение в ряд интегральной показательной функции, представим равенство (3.1,1) в виде

$$Ei(z) = \int_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t} dt + \int_{-1}^0 \frac{e^t - 1}{t} dt + + \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt + \int_{-1}^z \frac{dt}{t}$$

Рис. 5.

и заметим, что сумма первых двух интегралов есть некоторая абсолютная постоянная, которую мы обозначим через C .

* Без этого ограничения значение интеграла (3.1,1) будет зависеть от вида пути интегрирования и определенная им функция окажется многозначной. Основываясь на теореме Коши, легко показать, что все значения этой функции содержатся в формуле $Ei(z) + 2\pi i n$, где $Ei(z)$ определенная выше интегральная показательная функция, n — произвольное целое число.

** Производная $\frac{d}{dx} \{-Ei(-x)\} = -\frac{e^{-x}}{x} < 0$ при $x > 0$.

Полагая в первом интеграле $t = -u^{-1}$, а во втором $t = -u$, находим:

$$C = \int_0^1 \frac{1 - e^{-u} - e^{-\frac{1}{u}}}{u} du, \quad (3.1,3)$$

откуда следует (1.3,20), что C совпадает с постоянной Эйлера, $C = \gamma = 0,5772157\dots$ Таким образом, мы имеем

$$Ei(z) = \gamma + \ln(-z) + \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt, \quad (3.1,4)$$

где логарифм обозначает главное значение этой функции*).

Интеграл в правой части последнего равенства, поднят интегральное выражение в котором есть целая функция, представляет собой целую функцию комплексного переменного z , которая может быть разложена в степенной ряд, сходящийся на всей плоскости. Чтобы получить этот ряд, достаточно разложить подынтегральную функцию по степеням t и проинтегрировать почленно. Мы находим тогда

$$\int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt = \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{n!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!n}, \quad |z| < \infty,$$

откуда следует, что искомое разложение интегральной показательной функции будет

$$Ei(z) = \gamma + \ln(-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!n}. \quad (3.1,5)$$

Разложение справедливо во всякой точке плоскости (z), разрезанной вдоль положительной вещественной полуоси.

Из формулы (3.1,5) вытекает, что значения функции $Ei(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза будут соответственно

$$Ei(x \pm i0) = Ei_1(x) \mp \pi i, \quad x > 0,$$

* Действительно, $\int_{-1}^z \frac{dt}{t} = \int_1^{-z} \frac{du}{u} = \ln(-z)$, где логарифм имеет главное значение, так как при z , принадлежащих плоскости с разрезом вдоль полуоси $(0, \infty)$, аргумент $(-z)$ лежит между $-\pi$ и π .

где $E_1(x)$ — вещественная функция, определяемая равенством:

$$E_1(x) = \frac{1}{2} [Ei(x + i0) + Ei(x - i0)] = \gamma + \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! n}, \quad x > 0, \quad (3.1,6)$$

которая называется модифицированной интегральной показательной функцией *).

Интегральная показательная функция часто встречается в приложениях, например в теории излучения радиоволн антенной и в других задачах физики и техники. Многие интегралы более сложного вида могут быть выражены через интегральную показательную функцию. Так, например, интеграл

$$\int e^z f(z) dz,$$

где $f(z)$ — произвольная рациональная функция, представляется в конечном виде через функцию $Ei(z)$ и элементарные функции **).

§ 3.2. Асимптотическое представление интегральной показательной функции для $|z| \rightarrow \infty$

Для того чтобы получить асимптотическое представление $Ei(z)$, пригодное для аппроксимации этой функции при больших по модулю z , воспользуемся формулой (3.1,1) и преобразуем ее с помощью многократного интегрирования по частям.

Мы имеем тогда:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt &= \frac{e^z}{z} + \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^2} dt = \frac{e^z}{z} + \frac{1 \cdot e^z}{z^2} + 1 \cdot 2 \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^3} dt = \\ &= e^z \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1 \cdot 2}{z^3} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \dots n}{z^{n+1}} \right] + \\ &+ 1 \cdot 2 \dots (n+1) \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^{n+2}} dt, \end{aligned}$$

* Иногда для этой функции сохраняется обозначение $Ei(x)$, т. е. принимается, что $Ei(x) \equiv E_1(x)$, $x > 0$.

** См. упражнения, пример 5.

§ 3.2] АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ БОЛЬШИХ z 55

откуда следует

$$Ei(z) = \frac{e^z}{z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{k!}{z^k} + r_n(z) \right], \quad (3.2,1)$$

где

$$r_n(z) = (n+1)! z e^{-z} \int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t^{n+2}} dt. \quad (3.2,2)$$

Для оценки величины остаточного члена $r_n(z)$ заметим, что интегрирование по первоначально избранному пути может быть заменено, в силу теоремы Коши, интегрированием по прямой, параллельной вещественной оси, проходящей через точку $t = z$. Если $z = x + iy$, то вдоль рассматриваемой прямой $t = \sigma + iy$ ($-\infty < \sigma \leq x$), $|e^{t-z}| = e^{\sigma-x}$ и, в предположении, что $x \leq 0$, $|t| \geq |z|$. Из оценки по модулю поэтому следует:

$$|r_n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \int_{-\infty}^x e^{\sigma-x} dx = \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1}} \quad (3.2,3)$$

для всех $\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{2}$.

Полученный результат показывает, что при больших $|z|$ и фиксированном, не слишком большом n величина $r_n(z)$ будет малой по сравнению с остальными членами в квадратных скобках в (3.2,1), так что эта формула удобна для представления $Ei(z)$ в рассматриваемом секторе плоскости комплексного переменного. Если $\arg z$ принадлежит одному из секторов $\delta \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2} \leq \arg z \leq 2\pi - \delta$, где δ — произвольно малое положительное число, то из (3.2,2) вместо (3.2,3) получается оценка:

$$|r_n(z)| \leq \frac{(n+1)!}{|z|^{n+1} (\sin \delta)^{n+1}}. \quad (3.2,4)$$

Из (3.2,3—4) вытекает, что в соответствии с определением асимптотического ряда (§ 1.4)

$$Ei(z) \approx \frac{e^z}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{z^k}, \quad \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta. \quad (3.2,5)$$

§ 3.3. Интегральная показательная функция с мнимым аргументом. Интегральные синус и косинус

Если аргумент интегральной функции $Ei(z)$ есть мнимое число $z = xi$ ($x > 0$), рассматриваемая функция может быть выражена через две вещественные функции $Si(x)$ и $Ci(x)$, известные в литературе под названием интегрального синуса и интегрального косинуса.

Эти функции, имеющие также большое самостоятельное значение, в общем случае комплексного аргумента определяются при помощи формул:

$$Si(z) = \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt, \quad Ci(z) = \int_{\infty}^z \frac{\cos t}{t} dt, \quad (3.3,1)$$

где в первом интеграле выбор пути интегрирования является вполне произвольным, во втором — ограничен требованием,

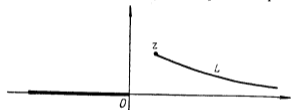


Рис. 6.

чтобы кривая L , вдоль которой производится интегрирование, принадлежала плоскости, разрезанной вдоль отрицательной вещественной полуоси (рис. 6).

Согласно общей теореме*), $Si(z)$ — целая функция z , $Ci(z)$ — функция, регулярная в плоскости (z) с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$. При вещественном $z = x > 0$ обе функции вещественны и имеют колебательный характер**).

*) § 2.1, стр. 32, примечание.

***) При $x < 0$ $Si(x) = -Si(|x|)$, функция $Ci(x)$ не определена. Колебательный характер следует из формул:

$$\frac{d}{dx} Si(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{d}{dx} Ci(x) = \frac{\cos x}{x},$$

показывающих, что $Si(x)$ достигает экстремума в точках $x = n\pi$

($n = 1, 2, \dots$), $Ci(x)$ — в точках $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Графики функций $Si(x)$ и $Ci(x)$ изображены на рис. 7. Кривая $y = Si(x)$ проходит через начало координат и асимптотически приближается к предельному значению

$$Si(+\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Кривая $y = Ci(x)$ имеет своей асимптотой каждую из координатных осей*).

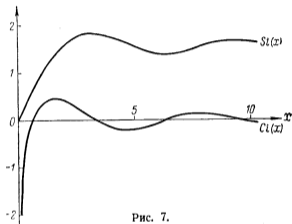


Рис. 7.

Для того чтобы установить связь между функциями $Ei(xi)$, $Si(x)$ и $Ci(x)$, положим в формуле (3.1,1) $z = xi$ ($x > 0$) и покажем, что интегрирование по первоначально избранному пути L может быть заменено интегрированием вдоль мнимой оси. Для доказательства рассмотрим интеграл от функции $\frac{e^t}{t}$, взятый по замкнутому контуру, состоящему из дуги C_R круга радиуса R , описанного из начала координат, отрезка L_R кривой L (рис. 8), находящегося внутри этого круга, и отрезка (x, R) мнимой оси. По теореме Коши имеем:

$$\int_{L_R} + \int_{xi}^{Ri} + \int_{C_R} = 0.$$

*) Ибо $Ci(0) = -\infty$, $Ci(+\infty) = 0$.

При переходе к пределу при $R \rightarrow \infty$ интеграл по L_R стремится к $Ei(x)$, а интеграл по C_R исчезает*), поэтому:

$$Ei(x) = - \int_{xi}^{i\infty} \frac{e^t}{t} dt = \int_{\infty}^x \frac{e^{iu}}{u} du = \int_{\infty}^x \frac{\cos u}{u} du + i \int_{\infty}^x \frac{\sin u}{u} du,$$

откуда следует искомое соотношение:

$$Ei(x) = Ci(x) - i \left[\frac{\pi}{2} - Si(x) \right], \quad x > 0. \quad (3.3,2)$$

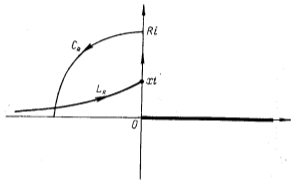


Рис. 8.

Функции $Si(z)$ и $Ci(z)$ могут быть представлены рядами простого вида. Разложение $Si(z)$ получается путем подста-

*) На дуге C_R : $t = Re^{i\psi}$, $\frac{\pi}{2} \leq \psi < \pi$, поэтому, принимая во внимание известное неравенство $\sin \psi \geq \frac{2}{\pi} \psi$, справедливое при $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^t}{t} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^{R \cos \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \psi} d\psi \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R}{\pi} \psi} d\psi = \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-R}}{R},$$

откуда вытекает, что $\int_{C_R} \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$.

новки в (3.3,1) степенного ряда для $\sin t$ и почленного интегрирования. Мы имеем:

$$Si(z) = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}, \quad |z| < \infty. \quad (3.3,3)$$

Вывод соответствующего разложения для $Ci(z)$ требует несколько более сложных рассуждений. Мы исходим из тождества

$$Ci(z) = \int_{\infty}^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^0 \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt + \int_1^z \frac{1}{t} dt,$$

откуда следует

$$Ci(z) = A + \ln z - \int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt,$$

где логарифм имеет свое главное значение и через A обозначена абсолютная постоянная

$$A = \int_{\infty}^1 \frac{\cos t}{t} dt + \int_1^0 \frac{\cos t - 1}{t} dt = \lim_{z \rightarrow 0} [Ci(z) - \ln z].$$

Значение этой постоянной легко вычислить, если предположить, что z стремится к нулю, оставаясь вещественным, и воспользоваться формулами (3.3,2), (3.1,4). Мы находим тогда $A = \gamma$, где γ — постоянная Эйлера*). Далее, при любых z

$$\int_0^z \frac{1 - \cos t}{t} dt = - \int_0^z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n-1}}{2n!} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{2n! 2n}, \quad |z| < \infty,$$

*) Действительно, при $x > 0$:

$$\begin{aligned} \lim [Ci(x) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[Ei(x) + \frac{\pi i}{2} - i Si(x) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\gamma + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n! n} \right] = \gamma. \end{aligned}$$

откуда следует, что искомое разложение для интегрального косинуса будет:

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n}}{2n! 2n}, \quad (3.3,4)$$

где $|\arg z| < \pi$ и $\gamma = 0,577\dots$

Из формулы (3.3,4) в частности вытекает, что значения функции $\text{Ci}(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза $(-\infty, 0)$ даются соответственно равенствами:

$$\text{Ci}(-x \pm i0) = \text{Ci}(x) \pm \pi i, \quad x > 0. \quad (3.3,5)$$

Асимптотические представления функций $\text{Si}(x)$ и $\text{Ci}(x)$ для больших положительных x могут быть получены, если исходить из формул § 3.2 и соотношения (3.3,2).

Мы имеем для $x \gg 1$:

$$\left. \begin{aligned} \text{Ci}(x) &= \frac{\sin x}{x} P(x) - \frac{\cos x}{x} Q(x), \\ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) &= \frac{\cos x}{x} P(x) + \frac{\sin x}{x} Q(x), \end{aligned} \right\} \quad (3.3,6)$$

где

$$P(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k 2k!}{x^{2k}} + O(x^{-2N-2}),$$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (2k+1)!}{x^{2k+1}} + O(x^{-2N-3}).$$

§ 3.4. Интегральный логарифм

С интегральной показательной функцией тесно связана другая специальная функция, играющая важную роль в анализе, известная под названием интегрального логарифма $\text{li}(z)$. Эта функция определяется при помощи равенства

$$\text{li}(z) = \int_0^z \frac{dt}{\ln t}, \quad (3.4,1)$$

где интеграл берется вдоль произвольного пути L , принадлежащего плоскости с разрезами по вещественной оси $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ (рис. 9).

На основании общей теоремы*) интегральный логарифм представляет собой регулярную функцию в рассматриваемой разрезанной плоскости. Если ввести новое переменное интегрирования $u = \ln t$, легко выразить $\text{li}(z)$ через интегральную показательную функцию. Действительно, исходная область (t)

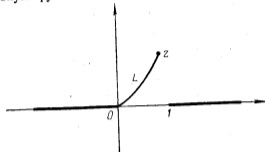


Рис. 9.

преобразуется на плоскости (u) в полосу $|J(u)| < \pi$ с разрезом вдоль положительной вещественной полуоси и интеграл (3.4,1) переходит в интеграл

$$\text{li}(z) = \int_{-\infty}^{\ln z} \frac{e^{u}}{u} du, \quad (3.4,2)$$

взятый по произвольному пути, принадлежащему этой области. Последняя составляет часть области, в которой определена интегральная показательная функция (§ 3.1), поэтому, согласно данному выше определению этой функции, находим

$$\text{li}(z) = \text{Ei}(\ln z), \quad (3.4,3)$$

где логарифм имеет свое главное значение.

Пользуясь соотношением (3.4,3), легко вывести свойства интегрального логарифма из соответствующих свойств интегральной показательной функции. Так, например, из формулы (3.1,4) следует формула

$$\text{li}(z) = \gamma + \ln(-\ln z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^n}{n! n}, \quad (3.4,4)$$

*) § 2.1, стр. 32, примечание.

где z принадлежит плоскости с разрезами $(-\infty, 0)$ и $(1, \infty)$ и логарифм всякий раз обозначает главное значение этой функции.

Из (3.4.4) вытекает в частности, что значения $\text{li}(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза $(1, \infty)$ будут

$$\text{li}(x \pm i0) = \text{li}_1(x) \mp \pi i, \quad x > 1, \quad (3.4.5)$$

где через $\text{li}_1(x)$ обозначена вещественная функция:

$$\begin{aligned} \text{li}_1(x) = & \frac{1}{2} [\text{li}(x + i0) + \text{li}(x - i0)] = \gamma + \ln \ln x + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n! n}, \quad x > 1. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Функция $\text{li}_1(x)$ называется модифицированным интегральным логарифмом*. Из (3.1.6) следует, что эта функция связана с соответствующей модифицированной интегральной показательной функцией $\text{Ei}_1(x)$ соотношением

$$\text{li}_1(x) = \text{Ei}_1(\ln x), \quad (3.4.7)$$

Функция $\text{li}_1(x)$ часто встречается в анализе, в частности играет важную роль в теории чисел**).

В заключение укажем на вытекающее из (3.2.1) асимптотическое представление

$$\left. \begin{aligned} \text{li}(z) = & \frac{z}{\ln z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{k!}{(\ln z)^k} + r_n(z) \right], \\ |r_n(z)| \leq & \frac{(n+1)!}{|\ln z|^{n+1}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.4.8)$$

справедливое в области $|z| < 1$, $|\arg z| < \pi$.

§ 3.5. Приложение к радиотехнике. Излучение линейного полуволнового вибратора

В качестве простого примера приложения специальных функций, изученных в настоящей главе, рассмотрим задачу об излучении одиночного линейного вибратора длины

*) Иногда сохраняют для этой функции название и обозначение интегрального логарифма, используя то обстоятельство, что для $z = x > 1$ последняя функция не определена равенством (3.4.1).

***) См. например, А. Е. Ингам [1].

$2l = \frac{\lambda}{2}$ (λ — длина волны), по которому течет переменный ток частоты $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, распределенный вдоль провода по закону

$$I = I_0 \cos \frac{\pi \zeta}{2l} \cos \omega t, \quad -l \leq \zeta \leq l. \quad (3.5.1)$$

Если обозначить через $\mathbf{E}^{(t)}$ и $\mathbf{H}^{(t)}$ векторы электрического

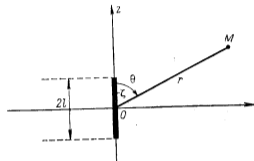


Рис. 10.

и магнитного полей, \mathbf{E} и \mathbf{H} — их комплексные амплитуды, связанные с первыми соотношениями

$$\mathbf{E}^{(t)} = R(\mathbf{E}e^{i\omega t}), \quad \mathbf{H}^{(t)} = R(\mathbf{H}e^{i\omega t}), \quad (3.5.2)$$

то средняя мощность энергии, излучаемой вибратором за период, определяется формулой:

$$P = R \left\{ \frac{c}{8\pi} \int_{(S)} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]_n ds \right\}, \quad (3.5.3)$$

где (S) — произвольная поверхность, охватывающая вибратор, \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности, \mathbf{H}^* — сопряженное значение вектора \mathbf{H} .*

*) См., например, Дж. А. Стрэттон [1].

Заметим, что сопряженным значением комплексного вектора \mathbf{H} , составляющие которого суть комплексные числа (H_x, H_y, H_z) , называется вектор \mathbf{H}^* с составляющими (H_x^*, H_y^*, H_z^*) , представляющими собой комплексно сопряженные числа $H_x^* = \overline{H_x}$, $H_y^* = \overline{H_y}$, $H_z^* = \overline{H_z}$.

В рассматриваемом случае векторы E и H имеют в сферической системе координат (r, θ, φ) компоненты $(E_r, E_\theta, 0)$ и $(0, 0, H)$, и в качестве поверхности (S) удобно выбрать сферу $r = \rho$ произвольно большого радиуса ρ .

Формула (3.5.3) принимает тогда вид:

$$P = R \left\{ \frac{c\rho^3}{4} \int_0^\pi E_\theta H^* \sin \theta d\theta \right\}, \quad (3.5.4)$$

где под знаком интеграла можно заменить точные значения E_θ и H их асимптотическими выражениями.

Воспользовавшись известными формулами для составляющих электромагнитного поля элементарного диполя и интегрируя по φ , мы легко получаем, что при достаточно большом ρ ,

$$\begin{aligned} H &\approx E_\theta \approx \frac{I_0 ik}{c\rho} e^{-ik\rho} \sin \theta \int_{-1}^1 \cos \frac{\pi z}{2l} e^{ikz \cos \theta} dz = \\ &= \frac{2I_0 l}{c\rho} e^{-ik\rho} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta}, \end{aligned}$$

где $k = \frac{\omega}{c}$, откуда следует

$$P = \frac{I_0^2}{c} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} d\theta. \quad (3.5.5)$$

Последний интеграл может быть выражен через интегральный косинус $Ci(x)$ (§ 3.3).

Вводя новое переменное интегрирования $x = \cos \theta$, имеем:

$$\begin{aligned} P &= \frac{I_0^2}{c} \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x^2} dx = \frac{I_0^2}{2c} \left[\int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 - x} dx + \right. \\ &+ \left. \int_0^1 \frac{1 + \cos \pi x}{1 + x} dx \right] = \frac{I_0^2}{2c} \left[\int_0^1 \frac{1 - \cos \pi y}{y} dy + \right. \\ &+ \left. \int_1^2 \frac{1 - \cos \pi y}{y} dy \right] = \frac{I_0^2}{2c} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos z}{z} dz. \quad (3.5.6) \end{aligned}$$

Если воспользоваться теперь соотношением (3.3,4), то получаем окончательно:

$$P = \frac{I_0^2}{2c} [\gamma + \ln 2\pi - Ci(2\pi)], \quad (3.5.7)$$

где $Ci(x)$ — интегральный косинус, γ — постоянная Эйлера.

Метод расчета излучения, изложенный в настоящем параграфе, может быть применен к антеннам более сложной конфигурации, причем замечательным является то обстоятельство, что и в этих случаях искомый результат выражается через интегральные функции.

§ 3.6. Таблицы интегральной показательной функции и других родственных ей функций

Для функций, рассмотренных в настоящей главе, существует ряд подробных таблиц, из которых мы укажем на следующие:

1. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$-Ei(-x)$,	$x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15,$	
$Ei_1(x)$,	$x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15,$	5 зн.
$Si(x), Ci(x)$,	$x = 0(0,01) 1(0,1) 5(1) 15(5) 100(10)$	200(100) 10 ³ .

(Примечание. По поводу обозначений см. § 1.6).

2. Mathematical Tables Project of the Work Projects Administration for the City of New York, Tables of Sine, Cosine and Exponential Integrals, vol. I—II (1940):

$-Ei(-x), Ei(x)$,	$x = 0(0,0001) 2(0,001) 10(0,1) 15.$
$Si(x), Ci(x)$,	$x = 0(0,0001) 2(0,001) 10(0,1) 20(0,2) 40.$
	9—10 зн.

Значения функций $Si(x)$ и $Si_1(x)$ могут быть вычислены с помощью таблиц для интегрально показательной функции, если воспользоваться соотношениями (3.4,3,7). Сведения о других таблицах рассматриваемых функций читатель может почерпнуть в цитированной выше (§ 1.6) работе Флетчера, Миллера и Розенхеда.

Упражнения

1. Исходя из (3.1,1) и определения модифицированной интегральной показательной функции $Ei_1(x)$, показать, что

$$Ei_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^t}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^t}{t} dt \right\}, \quad x > 0,$$

т. е. что $Ei_1(x)$ есть главное значение интеграла $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$.

2. Получить интегральное представление

$$Ei_1(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt.$$

Указание. Разложить интеграл в ряд по степеням x и воспользоваться (3.1,6).

3. Применять правило Лопиталля, показав последовательно

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} Ei_1(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} Ei_1(x) = 1$$

и получить отсюда асимптотическую формулу

$$Ei_1(x) \approx \frac{e^x}{x}.$$

4. Воспользовавшись результатом примера 3 и соотношением (3.4,7), вывести асимптотическую формулу

$$Li_1(x) \approx \frac{x}{\ln x},$$

играющую важную роль в теории чисел.

5. Интеграл $\int f(x) e^x dx$, где $f(x)$ — произвольная рациональная функция и путь интегрирования не проходит через особые точки, приводится, через выделение целой части $f(x)$ и разложение остатка на простейшие дроби, к интегралам вида

$$(I) \int x^n e^x dx, \quad (II) \int \frac{e^x}{(x-a)^n} dx,$$

n — целое положительное число.

При помощи интегрирования по частям интеграл типа (I) может быть выражен через элементарные функции, а интеграл (II) — приведен к интегралу $\int \frac{e^x}{x-a} dx$, который подстановкой $u = x - a$ сводится к интегральной показательной функции (вообще говоря, от комплексного аргумента).

Применяя описанный метод, показать, что при $x < 0$:

$$\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t^2(t-1)} dt = \frac{e^x}{x} - 2Ei_1(x) + e Ei_1(x-1).$$

6. Получить формулу:

$$Li_1(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right\}, \quad x > 1.$$

Указание. Воспользоваться соотношением (3.4,7) и результатом примера 1.

7. Убедиться в справедливости равенств:

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt = Si(2x) - \frac{\sin^2 x}{x}, \quad \int_0^{\infty} [Ci(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}.$$

8. Если \bar{f} — преобразование Лапласа от функции f (стр. 50, пример 4), то доказать, что

$$\overline{Si(x)} = \arctg \frac{1}{p}, \quad -\overline{Ei(-x)} = \frac{1}{p} \ln(1+p),$$

где арктангенс и логарифм имеют свои главные значения.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ III

Нильсен [1], Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1], Магнус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА IV

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

§ 4.1. Общие замечания об ортогональных полиномах

Система функций $f_n(x)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) называется ортогональной в промежутке (a, b) с весом $p(x)$, если при всяком $m \neq n$ имеет место равенство

$$\int_a^b p(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0, \quad (4.1.1)$$

где $p(x)$ — некоторая фиксированная неотрицательная функция, не зависящая от индексов m и n .

Простейшим примером ортогональной системы является система тригонометрических функций $f_n(x) = \cos nx$, которая ортогональна в промежутке $(0, \pi)$ с весом $p(x) = 1$, ибо при $m \neq n$

$$\int_0^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0.$$

Ортогональные системы функций играют большую роль в анализе, главным образом в связи с возможностью разложения произвольных функций, принадлежащих к весьма широкому функциональному классу, в ряды по ортогональным функциям, примерами которых могут служить ряды Фурье, ряды Фурье—Бесселя и т. д.

Важный класс ортогональных систем функций составляют ортогональные полиномы $f_n(x) = p_n(x)$ (n — степень полинома), к которым относятся такие часто встречающиеся в приложениях специальные функции, как полиномы

Лежандра, Эрмита, Лагерра, Чебышева, Якоби и др. Перечисленные ортогональные полиномы обладают, наряду со свойствами ортогональности (4.1.1), рядом других общих свойств, например они являются интегралами дифференциальных уравнений простого вида и могут быть определены как коэффициенты разложения по степеням t некоторой соответственно выбранной функции $\omega(x, t)$, которая называется производящей функцией.

Ортогональные полиномы играют важную роль в математической физике, в теории аппроксимации функций, в теории механических квадратур и т. д.

Теории ортогональных полиномов посвящено очень большое число работ, среди которых видное место занимают исследования выдающихся русских математиков П. Л. Чебышева, Н. И. Сонина, В. А. Стеклова, А. А. Адамова, С. Н. Бернштейна и др.

В настоящей главе рассматривается теория полиномов Лежандра, Эрмита и Лагерра, имеющих наиболее многочисленные приложения в физике и технике. Краткие сведения о других типах ортогональных полиномов даны в упражнениях к данной главе (примеры 11—12). В целях удобства для читателя, интересующегося преимущественно прикладной стороной вопроса, изложение свойств каждого класса полиномов дано независимо одно от другого. Лица, интересующихся изучением теории ортогональных полиномов с более общей точки зрения, мы отсылаем к монографиям Лаврентьева—Шабата [1], Джексона [1] и Сеге [1].

§ 4.2. Полиномы Лежандра. Определение и производящая функция

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ для любых вещественных или комплексных значений переменного x определяются при помощи формулы

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.1)$$

откуда непосредственно следует:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad \text{и т. д.}$$

Общее выражение для полинома Лежандра n -го порядка получается из (4.2,1), если воспользоваться формулой бинома

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!} x^{2n-2k},$$

что дает

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}, \quad (4.2,2)$$

где $\lfloor y \rfloor$ обозначает целую часть числа y .

Ниже (§ 4.5) будет показано, что полиномы Лежандра образуют ортогональную систему функций на промежутке $(-1, 1)$ с весом $p(x) = 1^*$.

Свойства полиномов Лежандра могут быть выведены весьма простым способом, если предварительно доказать, что функция

$$w(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}},$$

где значение корня при $t=0$ выбрано равным единице, является производящей функцией для этих полиномов, т. е. для достаточно малых $|t|$ имеет место разложение:

$$w(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (4.2,3)$$

Так как $w(x, t)$, рассматриваемая как функция t , регулярна в круге $|t| < r$, радиус r которого равен меньшему из модулей корней квадратного уравнения $1 - 2tx + t^2 = 0^{**}$, то из общей теории следует, что существует разложение вида

$$w(x, t) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x) t^n, \quad |t| < r,$$

* Это свойство может быть установлено также, исходя непосредственно из определения (4.2,1). Заметим еще, что если $P_n(x)$ — производящая система полиномов, ортогональных на промежутке $(-1, 1)$ с весом $p(x) = 1$, то $p_n(x) = \gamma_n P_n(x)$, где γ_n не зависит от x .

** В наиболее важном для приложений случае, когда x есть вещественное число, принадлежащее промежутку $(-1, 1)$, $r = 1$.

с коэффициентами $c_n(x)$, которые могут быть выражены через контурные интегралы

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}} t^{-n-1} dt, \quad (4.2,4)$$

взятые по произвольному замкнутому контуру C , охватывающему точку $t=0$ и принадлежащему области регулярности $w(x, t)$.

При помощи подстановки $(1 - 2tx + t^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - tu$ рассматриваемые интегралы преобразуются в интегралы от рациональных функций

$$c_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(u^2 - 1)^n}{2^n (u - x)^{n+1}} du, \quad (4.2,5)$$

по замкнутому контуру C' , окружающему точку $u = x^*$, и могут быть вычислены с помощью теории вычетов. Применяя хорошо известные правила, находим

$$c_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left\{ \frac{d^n (u^2 - 1)^n}{du^{n+1}} \right\}_{u=x} \equiv P_n(x),$$

что и доказывает справедливость утверждения, высказанного выше.

В качестве простого примера приложения производящей функции к выводу свойств полиномов Лежандра укажем на получение равенств

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n},$$

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad (4.2,6)$$

непосредственно вытекающих из (4.2,3), если положить там x равным ± 1 или 0 и затем разложить левую часть по степеням t .

Полиномы Лежандра, определенные выше, играют важную роль в различных приложениях, в частности, в математической физике (гл. VII, § 3, 4, 7, 8, 13, 14).

* Точка $t=0$ соответствует точке $u=x$ и замкнутому контуру C' — замкнутому контуру C , так как после обхода вдоль C корень принимает свое прежнее значение.

§ 4.3. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лежандра

Другой пример использования разложения (4.2,3) представляет вывод рекуррентных соотношений для полиномов Лежандра. Чтобы получить первое из этих соотношений, воспользуемся тождеством

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial t} + (t - x)w = 0$$

и подставим в него ряд (4.2,3). Принимая во внимание, что степенной ряд можно дифференцировать почленно, имеем

$$(1 - 2tx + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} + (t - x) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n = 0,$$

откуда, приравняв нулю коэффициент при t^n , находим:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - 2nxP_n(x) + (n-1)P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) - xP_n(x) = 0,$$

или

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3,1)$$

Равенство (4.3,1) представляет собой рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Лежандра. Это равенство может быть использовано для последовательного вычисления рассматриваемых полиномов.

Аналогичным образом из тождества

$$(1 - 2xt + t^2) \frac{\partial w}{\partial x} - tw = 0$$

получаем *):

$$(1 - 2xt + t^2) \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n'(x) - \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} P_n(x) = 0,$$

*) Для обоснования возможности почленного дифференцирования ряда (4.2,1) по переменной x достаточно убедиться в равномерной сходимости этого ряда в области $|x| < a$ (a — любое конечное число), при достаточно малых $|t|$. Пусть $|t| < b$, где $b =$

$= \sqrt{a^2 + 1} - a$. Тогда, согласно § 4.2 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n$ сходится к $(1 - 2a|t| - |t|^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Равномерная сходимость ряда (4.2,1) при $|x| < a$, $|t| < b$

откуда следует:

$$P_{n+1}'(x) - 2xP_n'(x) + P_{n-1}'(x) - P_n(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3,2)$$

Дифференцируя (4.3,1) и исключая из полученного равенства и (4.3,2) один раз $P_{n-1}'(x)$, другой — $P_{n+1}'(x)$, находим два других рекуррентных соотношения *):

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3,3)$$

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3,4)$$

Складывая оба равенства, приходим к более симметричной формуле:

$$P_{n+1}'(x) - P_{n-1}'(x) = (2n+1)P_n(x). \quad (4.3,5)$$

Наконец, заменив в (4.3,3) n на $(n-1)$ и исключив из найденного уравнения и (4.3,4) $P_{n-1}'(x)$, находим:

$$(1 - x^2)P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3,6)$$

Последняя формула позволяет выразить производную от полинома Лежандра через эти полиномы. Если продифференцировать (4.3,6) по x и снова исключить $P_{n-1}(x)$ с помощью (4.3,4), получим:

$$[(1 - x^2)P_n'(x)]' + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3,7)$$

Соотношение (4.3,7) показывает, что полином Лежандра $u = P_n(x)$ является частным интегралом линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$[(1 - x^2)u']' + n(n+1)u = 0. \quad (4.3,8)$$

Полученное уравнение встречается в математической физике и играет важную роль в теории полиномов Лежандра.

следует теперь из неравенства

$$|P_n(x) t^n| \leq \frac{P_n(ia)}{i^n} |t|^n,$$

вытекающего из (4.2,2).

*) Справедливость дальнейших соотношений для нескольких первых значений n в некоторых случаях не вытекает из общих рассуждений; однако прямой подстановкой $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, ... легко убедиться в том, что эти соотношения сохраняют силу и для таких значений n .

При помощи замены переменных легко получить ряд других уравнений, интегралы которых могут быть выражены через полиномы Лежандра. Так, например, уравнению

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{du}{d\theta} \right) + n(n+1)u = 0 \quad (4.3,9)$$

удовлетворяет функция $u = P_n(\cos \theta)$, уравнению

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \left[n + \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{1}{4 \sin^2 \theta} u = 0 \quad (4.3,10)$$

— функция $u = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \theta)$ и т. д.

§ 4.4. Интегральные представления для полиномов Лежандра

Полиномы Лежандра допускают простые представления с помощью определенных интегралов, содержащих переменное x как параметр. Чтобы получить первое из этих представлений, предположим, что x — вещественное или комплексное число, и выберем в формуле (4.2,5) в качестве пути интегрирования круг радиуса $|x^2 - 1|^{\frac{1}{2}}$ с центром в точке $u = x^*$. При этом $u = x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}$ ($-\pi \leq \varphi \leq \pi$), и формула (4.2,3) принимает вид:

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{x^2 + 2x(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} + (x^2 - 1) e^{2i\varphi} - 1}{2(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi}} \right\}^n d\varphi,$$

откуда:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi]^n d\varphi. \quad (4.4,1)$$

Формула (4.4,1) называется интегралом Лапласа. Выбор значения корня $(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ здесь произволен, так как после возведения в n -ю степень и почленного интегрирования нечетные степени корня выпадают.

* По теореме Коши замена контура C любым другим простым замкнутым контуром, окружающим точку $u = x$, не изменяет значения интеграла.

Из (4.4,1) вытекает одно полезное неравенство для полиномов Лежандра. Пусть x — вещественное число, удовлетворяющее условию $-1 \leq x \leq 1$. Тогда $|x + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \cos \varphi| = [x^2 + (1 - x^2) \cos^2 \varphi]^{\frac{1}{2}} \leq 1$, откуда

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (4.4,2)$$

Другое важное интегральное представление для полиномов Лежандра может быть выведено из формулы (4.2,4), если

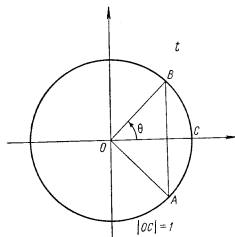


Рис. 11.

предположить, что x — вещественно и заключено в пределах $-1 < x < 1$.

Полагая в этом случае $x = \cos \theta$ ($0 < \theta < \pi$), мы можем записать рассматриваемую формулу в виде

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos \theta + i \sin \theta \sin \varphi)^n d\varphi,$$

откуда, если ввести новое комплексное переменное интегрирования $t = \cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi$, следует:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi i} \int_{e^{-i\theta}}^{e^{i\theta}} \frac{t^n dt}{\sqrt{1 - 2t \cos \theta + t^2}} \quad (4.4,3)$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку AB , соединяющему точки $t = e^{\pm i\theta}$ (рис. 11), и выбор ветви корня определяется из условия, что его значение в точке $t = \cos \theta$ равно $\sin \theta$.

По теореме Коши интегрирование по AB можно заменить интегрированием по дуге ACB круга единичного радиуса, так как в области, заключенной между дугой и хордой, подынтегральная функция регулярна. Выполнив эту замену и полагая $t = e^{i\psi}$, находим:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\psi}}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi,$$

откуда, после отделения вещественной части, следует:

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\psi}{\sqrt{2 \cos \psi - 2 \cos \theta}} d\psi, \quad 0 < \theta < \pi \quad (4.4,4)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Формула (4.4,4) известна в литературе под названием интеграла Дирихле — Мелера и дает искомое интегральное представление для полиномов Лежандра.

§ 4.5. Ортогональность полиномов Лежандра

Одним из наиболее важных свойств полиномов Лежандра является их ортогональность на промежутке $(-1, 1)$, представляющая собой следствие дифференциального уравнения (4.3,7). Чтобы установить рассматриваемое свойство, умножим уравнение для m -го полинома на $P_n(x)$, уравнение для n -го полинома — на $P_m(x)$ и вычтем одно из другого. Тогда получим:

$$\begin{aligned} & [(1-x^2)P_m'(x)]' P_n(x) - [(1-x^2)P_n'(x)]' P_m(x) + \\ & + [m(m+1) - n(n+1)] P_m(x) P_n(x) = 0 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \{ (1-x^2)[P_m'(x)P_n(x) - P_n'(x)P_m(x)] \}' + \\ & + (m-n)(m+n+1) P_m(x) P_n(x) = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку $(-1, 1)$ и замечая, что интеграл от первого слагаемого равен нулю, находим:

$$(m-n)(m+n+1) \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0,$$

откуда:

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0, \quad m \neq n. \quad (4.5,1)$$

Формула (4.5,1) показывает, что полиномы Лежандра ортогональны в промежутке $(-1, 1)$ с весом $p(x) = 1$. Свойство ортогональности (4.5,1) играет важную роль в теории разложения функций в ряды по полиномам Лежандра (§ 4.7). В этой теории необходимо также уметь находить значение интеграла (4.5,1) при $m = n$. Для этого заменим в рекуррентном соотношении (4.3,1) n на $(n-1)$, умножим полученное уравнение на $(2n+1)P_n(x)$, а уравнение (4.3,1) — на $(2n-1)P_{n-1}(x)$ и вычтем из первого второе*). Тогда получим:

$$\begin{aligned} & n(2n+1)P_n^2(x) + (n-1)(2n+1)P_{n-2}(x)P_n(x) - \\ & - (n+1)(2n-1)P_{n-1}(x)P_{n+1}(x) + \\ & + n(2n-1)P_{n-1}^2(x) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

откуда, интегрируя по промежутку $(-1, 1)$ и принимая во внимание (4.5,1), находим:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 P_{n-1}^2(x) dx, \quad n = 2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы дает:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{3}{2n+1} \int_{-1}^1 P_1^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Непосредственное вычисление показывает, что полученный результат справедлив также при $n = 0$ и $n = 1$. Таким образом:

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (4.5,2)$$

*) На этот прием нам указал В. Л. Кан.

Из формул (4.5,1—2) следует, что функции $\varphi_n(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} P_n(x)$, $n=0, 1, 2, \dots$ образуют ортонормированную систему функций на промежутке $(-1, 1)^*$.

§ 4.6. Асимптотическое представление полиномов Лежандра для больших значений индекса n

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ ($-1 < x < 1$) имеют простые асимптотические представления, удобные для рассмотрения поведения этих функций при $n \rightarrow \infty$, что представляет значительный интерес в связи с теорией разложения произвольных функций в ряды по полиномам Лежандра (§ 4.7). Для получения этих представлений может быть использован общий метод, принадлежащий В. А. Стеклову (**). Исходным пунктом для приложения этого метода к полиномам Лежандра является дифференциальное уравнение (4.3,10), которому удовлетворяет

функция $u = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} P_n(\cos \theta)$. Записав это уравнение в форме

$$u'' + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 u = -\frac{u}{4 \sin^2 \theta} \quad (4.6,1)$$

и принимая во внимание начальные условия $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_n(0)$, $u'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -P_n'(0)$, получаем, рассматривая правую часть уравнения (4.6,1) как известную функцию:

$$\begin{aligned} u(\theta) = & P_n(0) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \\ & + \frac{P_n'(0)}{n + \frac{1}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \\ & + \frac{1}{4\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\varphi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (4.6,2)$$

*) Система функций $\varphi_n(x)$ называется ортонормированной на промежутке (a, b) , если

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

**) Стеклов В. А., Известия Харьковского матем. об-ва (2), 10, стр. 97—200 (1907).

Уравнение (4.6,2) можно рассматривать как интегральное уравнение для функции $u(\theta)$. Если воспользоваться формулами (4.2,6; 4.3,6) и известными соотношениями теории гамма-функции (1.2, 1, 4, 6), то получим

$$\begin{aligned} P_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)}, \quad P_{2m+1}(0) = 0, \quad P'_{2m}(0) = 0, \\ P'_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{2\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1)}, \end{aligned}$$

откуда следует, что уравнение (4.6,2) может быть записано в виде

$$u(\theta) = \alpha_n \left\{ \sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \frac{\pi}{4}\right] + r_n(\theta) \right\}, \quad (4.6,3)$$

где α_n обозначает первое или второе из выражений

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}, \quad \frac{2\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}{\sqrt{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right)},$$

в зависимости от того, будет n четным или нечетным числом, и

$$r_n(\theta) = \frac{1}{4\alpha_n \left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(\varphi) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)(\theta - \varphi) \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (4.6,4)$$

Предположим теперь, что переменное θ заключено в пределах $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$; δ — фиксированное положительное число. Обозначим через M_n максимум модуля $u(\theta)$ в этом интервале. Тогда из (4.6,3) и (4.6,4) следует, что для всякого θ , принадлежащего замкнутому интервалу $(\delta, \pi - \delta)$,

$$|u(\theta)| \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{8\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin^2 \delta},$$

поэтому

$$M_n \leq \alpha_n + \frac{\pi M_n}{8\left(n + \frac{1}{2}\right) \sin^2 \delta}.$$

Решая последнее неравенство относительно M_n , получаем для всех $n > \frac{\pi}{8 \sin^2 \delta} - \frac{1}{2}$:

$$M_n \leq \frac{\alpha_n}{1 - \frac{\pi}{8 \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin^2 \delta}},$$

откуда следует оценка:

$$|r_n(\theta)| \leq \frac{\frac{\pi}{8 \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin^2 \delta}}{1 - \frac{\pi}{8 \left(n + \frac{1}{2}\right) \sin^2 \delta}}, \quad n > \frac{\pi}{8 \sin^2 \delta} - \frac{1}{2}.$$

Полученный результат показывает, что $r_n(\theta) = O(n^{-1})$ равномерно во всем замкнутом интервале $(\delta, \pi - \delta)$. Далее из (4.6,3) вытекает асимптотическая формула

$$u(\theta) \approx_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right] \quad (4.6,5)$$

для всех $\delta \leq \theta \leq \pi - \delta$.

Если воспользоваться формулой Стирлинга (1.4,24), то после простых вычислений находим:

$$\alpha_n \approx_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}},$$

поэтому формула (4.6,5) может быть записана в более простом виде:

$$u(\theta) \approx_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi n} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right]. \quad (4.6,6)$$

Подставляя $u(\theta)$, получаем окончательную асимптотическую формулу для полиномов Лежандра:

$$P_n(\cos \theta) \approx_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi n \sin \theta} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right], \quad (4.6,7)$$

$$\delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

Более точные асимптотические представления даны в монографии Гобсона*).

*) Е. В. Гобсон [1].

§ 4.7. Разложение функций в ряды по полиномам Лежандра

Во многих вопросах, связанных с различными приложениями полиномов Лежандра, возникает необходимость разложить заданную на интервале $(-1, 1)$ функцию $f(x)$ в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \quad -1 < x < 1. \quad (4.7,1)$$

Коэффициенты c_n этого разложения могут быть формально определены на основании свойства ортогональности полиномов Лежандра (§ 4.5). Действительно, умножая ряд (4.7,1) на $P_m(x)$ и интегрируя по промежутку $(-1, 1)$, получаем, принимая во внимание равенства (4.5,1—2):

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) P_m(x) dx &= \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) P_m(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2}{2m+1} c_m, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7,2)$$

Так как заранее неизвестно, допускает ли функция $f(x)$ разложение в ряд вида (4.7,1) и законно ли почленное интегрирование этого ряда, выполненное в процессе определения коэффициентов c_n , нельзя без специального исследования утверждать, что полученный таким образом ряд сходится и имеет своей суммой $f(x)$.

Следующая теорема устанавливает простые достаточные условия такой сходимости.

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — произвольная вещественная функция, заданная на интервале $(-1, 1)$ и удовлетворяющая условиям:

1°. $f(x)$ есть кусочно-гладкая функция в открытом интервале $(-1, 1)$;

2°. интеграл $\int_{-1}^1 f^2(x) dx$ имеет конечное значение.

Тогда ряд (4.7,1) с коэффициентами c_n , вычисленными по формуле (4.7,2), сходится к $f(x)$ во всякой внутренней точке интервала $(-1, 1)$, являющейся точкой непрерывности этой функции.

Для доказательства теоремы заметим прежде всего, что из условий, наложенных на $f(x)$, следует, что интегралы, стоящие в правой части (4.7,2), существуют, поэтому коэффициенты c_n действительно могут быть вычислены. В самом деле, подынтегральное выражение является интегрируемой функцией на открытом интервале $(-1, 1)$ и, в силу очевидного неравенства, рассматриваемый интеграл мажорируется интегралом $\int_{-1}^1 \frac{1}{2} [f^2(x) + P_n^2(x)] dx$, который сходится в силу 2°.

Обозначим через $S_m(x)$ сумму $(m+1)$ первых членов ряда (4.7,1). Подставляя значения коэффициентов c_n , имеем:

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \sum_{n=0}^m c_n P_n(x) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(x) \int_{-1}^1 f(y) P_n(y) dy = \\ &= \int_{-1}^1 f(y) K_m(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.7,3)$$

где

$$K_m(x, y) = \sum_{n=0}^m \left(n + \frac{1}{2} \right) P_n(x) P_n(y). \quad (4.7,4)$$

Значение последней суммы может быть найдено путем следующего приема: умножим рекуррентное соотношение (4.3,1) на $P_n(y)$ и вычтем из полученного уравнения такое же уравнение с переставленными значениями x и y . Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} (n+1) [P_{n+1}(x) P_n(y) - P_{n+1}(y) P_n(x)] - \\ - n [P_n(x) P_{n-1}(y) - P_n(y) P_{n-1}(x)] = \\ = (2n+1)(x-y) P_n(x) P_n(y). \end{aligned}$$

Суммируя по n от единицы до m и замечая, что $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, находим:

$$\begin{aligned} (x-y) \sum_{n=1}^m (2n+1) P_n(x) P_n(y) = \\ = (m+1) [P_{m+1}(x) P_m(y) - P_{m+1}(y) P_m(x)] - (x-y), \end{aligned}$$

откуда:

$$K_m(x, y) = \frac{m+1}{2} \cdot \frac{P_{m+1}(x) P_m(y) - P_{m+1}(y) P_m(x)}{x-y}. \quad (4.7,5)$$

Если проинтегрировать равенство (4.7,4) по y в пределах от -1 до $+1$, то из (4.5,1—2) следует*), что

$$\int_{-1}^1 K_m(x, y) dy = 1. \quad (4.7,6)$$

Предположим теперь, что x есть внутренняя точка интервала $(-1, 1)$, в которой $f(x)$ непрерывна, умножим равенство (4.7,6) на $f(x)$ и вычтем из (4.7,3). Тогда получим:

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x) &= \int_{-1}^1 K_m(x, y) [f(y) - f(x)] dy = \\ &= \frac{m+1}{2} P_m(x) \int_{-1}^1 P_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy - \\ &- \frac{m+1}{2} P_{m+1}(x) \int_{-1}^1 P_m(y) \varphi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.7,7)$$

где положено:

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

1°. $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция в открытом интервале $(-1, 1)$;

*) Так как $P_0(y) = 1$, то $\int_{-1}^1 P_n(y) dy = \begin{cases} 0, & n=1, 2, \dots \\ 1, & n=0; \end{cases}$

2°. интеграл $\int_{-1}^1 \varphi^3(x) dx$ имеет конечное значение.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \varphi(x) P_n(x) dx = 0. \quad (4.7,8)$$

Для доказательства леммы представим рассматриваемый интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 \dots &= \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-1}^{-1+\delta} \dots + \right. \\ &\left. + \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \dots + \int_{1-\delta}^1 \dots \right] = J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (4.7,9)$$

Применяя неравенство Буняковского — Шварца *) и воспользовавшись (4.5,2), получаем:

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 P_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \int_{1-\delta}^1 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

и аналогично

$$|J_1| \leq \left\{ \int_{-1}^{-1+\delta} \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$*) \left\{ \int_a^b f(x) g(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], п° 447.

§ 4.7] РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В РЯДЫ ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА 85

Из этих оценок и условия 2° леммы следует, что можно выбрать такое не зависящее от n значение δ , что будут выполнены неравенства

$$\bullet \quad |J_1| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad |J_3| < \frac{1}{3} \varepsilon, \quad (4.7,10)$$

где ε — наперед заданное положительное число.

Считая, что δ фиксировано таким образом и воспользовавшись формулой (4.6,3), имеем:

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta = \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_n \left[2^{-\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta + \right. \\ &\quad \left. + 2^{-\frac{1}{2}} \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\delta_1}^{\pi-\delta_1} \varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} r_n(\theta) d\theta \right], \end{aligned}$$

где положено $\delta_1 = \arccos(1 - \delta)$.

Так как, согласно 1°, $\varphi(\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}}$ — кусочно-непрерывная функция, первые два интеграла стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ *); последний интеграл также стремится к нулю, ибо $r_n(\theta) = O(n^{-1})$ равномерно во всем промежутке $(\delta_1, \pi - \delta_1)$. Далее, согласно замечанию на стр. 80, произведение

$\left(n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha_n \rightarrow \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}$, когда $n \rightarrow \infty$, поэтому $J_2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и, следовательно, при надлежащем выборе числа $N = N(\varepsilon)$,

$$|J_2| < \frac{1}{3} \varepsilon \quad (4.7,11)$$

для всякого $n > N$. Таким образом, в соответствии с (4.7,10—11),

$$|J_1 + J_2 + J_3| < \varepsilon, \quad n > N,$$

что и доказывает лемму.

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], п° 656.

Завершение доказательства теоремы не представляет теперь большого труда.

Действительно, из условия 1° вытекает, что $\varphi(x, y)$, рассматриваемая как функция переменного y , будет кусочно-непрерывной в открытом интервале $(-1, 1)$, а из условия 2° следует, что интеграл от квадрата этой функции, взятый по промежутку $(-1, 1)$, имеет конечное значение*). Поэтому, на основании леммы,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(m + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-1}^1 P_m(y) \varphi(x, y) dy = 0.$$

Принимая во внимание, что, согласно (4.6,7), каждое из произведений

$$\frac{(m+1)}{2\left(m + \frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} P_m(x) \quad \frac{(m+1)}{2\left(m + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} P_m(x)$$

остается ограниченным при $m \rightarrow \infty$, получаем, что правая часть (4.7,7) стремится к нулю, когда $m \rightarrow \infty$. Таким образом,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = f(x), \quad (4.7,12)$$

что и доказывает теорему 1.

С теоретической точки зрения представляет интерес также сходимость ряда (4.7,1) в точке разрыва $f(x)$. Можно показать, что при выполнении условий теоремы 1 ряд (4.7,1) сходится и в этом случае, причем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]. \quad (4.7,13)$$

*) Кусочная непрерывность $\varphi(x, y)$ при всяком $-1 < y < 1$, отличным от $y = x$, является следствием кусочной непрерывности $f(y)$ в этом интервале; кусочная непрерывность во всем открытом интервале $(-1, 1)$ вытекает из кусочной гладкости, на основании которой $\varphi(x, x-0) = f'(x-0)$, $\varphi(x, x+0) = f'(x+0)$ в предположении, что $y = x$ точка непрерывности $f(y)$. Конечность интеграла от квадрата $\varphi(x, y)$ является следствием 2°.

В заключение укажем, что условия 1°—2° теоремы 1, достаточные для возможности представления функции $f(x)$ рядом (4.7,1), могут быть значительно смягчены. Теорема разложения, справедливая для более широкого класса функций, доказана в монографии Гобсона*).

§ 4.8. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Лежандра

Рассмотрим несколько простых примеров, поясняющих технику разложения функций в ряды по полиномам Лежандра.

Пример 1. Пусть $f(x)$ — полином m -й степени,

$$f(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n.$$

Разложение (4.7,1) принимает в этом случае вид:

$$f(x) = \sum_{n=0}^m c_n P_n(x). \quad (4.8,1)$$

Для определения коэффициентов c_n нет необходимости вычислять интегралы (4.7,2) и проще найти их из системы линейных уравнений, получающейся путем подстановки в (4.8,1) явных выражений для полиномов Лежандра и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в левой и правой частях.

Например, мы имеем:

$$x^2 = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 \frac{3x^2 - 1}{2},$$

откуда следует $c_2 = \frac{2}{3}$, $c_1 = 0$, $c_0 = \frac{1}{3}$, так что

$$x^2 = \frac{1}{3} P_0(x) + \frac{2}{3} P_2(x).$$

Пример 2. Пусть $f(x)$ определена равенствами: $f(x) = 0$ при $-1 \leq x < \alpha$; $f(x) = 1$ при $\alpha < x \leq 1$.

По теореме 1 рассматриваемая функция разлагается в ряд (4.7,1) с коэффициентами c_n , определяемыми формулами:

$$c_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \int_{\alpha}^1 P_n(x) dx.$$

*) Е. В. Гобсон [1], гл. VII.

Вспользовавшись равенством (4.3,5) и замечая, что $P_n(1) = 1$, находим:

$$c_n = -\frac{1}{2} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)], \quad c_0 = \frac{1}{2}(1 - \alpha),$$

откуда искомое разложение будет:

$$f(x) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P_{n+1}(\alpha) - P_{n-1}(\alpha)] P_n(x), \quad (4.8,2)$$

$$-1 < x < 1.$$

Покажем, что в точке разрыва $x = \alpha$ выполняется соотношением (4.7,13). Действительно, обозначая $S_m(x)$ сумму $(m+1)$ первых членов ряда (4.8,2) мы имеем:

$$S_m(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m [P_{n+1}(\alpha) P_n(\alpha) - P_n(\alpha) P_{n-1}(\alpha)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} P_{m+1}(\alpha) P_m(\alpha).$$

Так как, согласно (4.6,7), $P_n(\alpha) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(\alpha) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} [f(\alpha + 0) + f(\alpha - 0)],$$

как это и следует из общей теории.

Пример 3. Положим $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$.

Рассматриваемая функция удовлетворяет условиям теоремы 1, следовательно, разлагается в ряд (4.7,1). Для вычисления коэффициентов c_n используем следующий прием, полезный во многих случаях. Умножим разложение (4.2,3) на $f(x)$ и проинтегрируем по промежутку $(-1, 1)$. После элементарных вычислений получаем:

$$\frac{1}{2t} \left[1 + t + \frac{(1-t)^2}{2\sqrt{t}} \ln \frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx, \quad |t| < 1,$$

причем законность почленного интегрирования следует из равномерной сходимости ряда (4.2,3) в промежутке $-1 \leq x \leq 1$, вытекающей из оценки (4.4,2). Разлагая левую часть последнего равенства в ряд по степеням t , находим:

$$\frac{4}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(4n^2-1)(2n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx,$$

откуда

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_0(x) dx = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{2}} P_n(x) dx = -\frac{4}{(4n^2-1)(2n+3)}.$$

Из формул (4.7,2) теперь вытекает, что искомое разложение будет:

$$\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{2}{3} P_0(x) - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)},$$

$$-1 < x < 1. \quad (4.8,3)$$

§ 4.9. Полиномы Эрмита. Определение и производящая функция

Другой важный класс ортогональных полиномов, встречающихся в математической физике и других приложениях, составляют полиномы Эрмита $H_n(x)$, которые могут быть определены при помощи равенства *):

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad (4.9,1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

*) Многочлены $H_n(x)$ были введены П. Л. Чебышевым в 1859 г., за несколько лет до опубликования работы Эрмита, в связи с чем исторически более правильно называть их многочленами Чебышева — Эрмита.

Выполнив дифференцирование в формуле (4.9,1), находим:

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \\ H_3(x) = 8x^3 - 12x, \dots$$

и вообще

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k n!}{k! (n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (4.9,2)$$

где $\lfloor v \rfloor$ — целая часть числа v . В дальнейшем (§ 4.13) будет показано, что полиномы Эрмита образуют ортогональную систему функций на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$. Полиномы Эрмита могут быть представлены, как коэффициенты разложения

$$w(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n, \quad |t| < \infty, \quad (4.9,3)$$

левая часть которого называется производящей функцией для этих полиномов^{*}.

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что $w(x, t)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного t , есть целая функция, допускающая разложение в ряд Тейлора:

$$w(x, t) = e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)_{t=0}}{n!} t^n, \quad |t| < \infty.$$

Принимая во внимание, что

$$\left(\frac{\partial^n w}{\partial t^n}\right)_{t=0} = e^{x^2} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(x-t)^2} \right\}_{t=0} = \\ = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{\partial^n e^{-u^2}}{\partial u^n}\right)_{u=x} \equiv H_n(x),$$

^{*} Строго говоря, функция $w(x, t)$ является производящей функцией полиномов $H_n^e(x) = \frac{1}{n!} H_n(x)$, отличающихся от полиномов Эрмита постоянным множителем.

приходим к разложению (4.9,3). Полученная формула может быть использована для вывода различных свойств полиномов Эрмита. Например, полагая в (4.9,3) $x=0$ и разлагая e^{-t^2} в ряд по степеням t , находим путем сравнения коэффициентов:

$$H_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad H_{2n+1}(0) = 0. \quad (4.9,4)$$

Полиномы Эрмита встречаются в математической физике в связи с интегрированием уравнений Лапласа и Гельмгольца в параболической системе координат, в квантовой механике и т. д. (§ 10.9—10).

§ 4.10. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Эрмита

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial w}{\partial t} - (2x - 2t)w = 0$$

и замечая, что степенной ряд допускает почленное дифференцирование, получаем подстановкой (4.9,3):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_{n+1}(x)}{n!} t^n - 2x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при t^n , находим:

$$H_{n+1}(x) - 2x H_n(x) + 2n H_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10,1)$$

Равенство (4.10,1) представляет собой рекуррентное соотношение, связывающее три последовательных полинома Эрмита. Это соотношение может быть использовано для последовательного составления полиномов $H_n(x)$ по первым двум.

Второе рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют рассматриваемые полиномы, получается аналогичным образом из тождества

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 2tw = 0.$$

Подставляя ряд (4.9,3), получаем *):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{n!} t^n - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n+1} = 0,$$

откуда следует

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.10,2)$$

Формула (4.10,2) полезна тем, что она дает выражение производной полинома Эрмита через полином Эрмита.

Из найденных рекуррентных соотношений (4.10,1—2) легко вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют полиномы Эрмита.

Исключая из этих соотношений $H_{n-1}(x)$, находим:

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H_n'(x) = 0,$$

откуда, дифференцируя и снова принимая во внимание (4.10,2), получаем:

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.10,3)$$

причем справедливость этого соотношения при $n=0$ доказывается непосредственной проверкой. Из (4.10,3) вытекает, что функция $u = H_n(x)$ является частным интегралом дифференциального уравнения

$$u'' - 2xu' + 2nu = 0. \quad (4.10,4)$$

При помощи замены переменных легко получить другие дифференциальные уравнения, интегралы которых могут быть

*) Возможность почленного дифференцирования ряда (4.9,3) по переменному x следует из равномерной сходимости этого ряда в области $|x| < a$, a — любое конечное число. Действительно, из (4.9,2) вытекает оценка $|H_n(x)| \leq \frac{H_n(ai)}{i^n}$, откуда вытекает, что рассматриваемый ряд мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n}{n!} \frac{H_n(ai)}{i^n} = e^{2a|t| + |t|^2},$$

поэтому сам сходится равномерно при $|x| < a$.

выражены через полиномы Эрмита. В частности, нетрудно проверить, что частным интегралом уравнения

$$u'' + (2n + 1 - x^2)u = 0 \quad (4.10,5)$$

является функция

$$u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$$

и т. д.

§ 4.11. Интегральные представления для полиномов Эрмита

Полиномы Эрмита допускают простые представления с помощью определенных интегралов, содержащих переменную как параметр. Для вывода этих формул воспользуемся известным интегралом *)

$$e^{-x^2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2xt \, dt, \quad (4.11,1)$$

где x — любое вещественное или комплексное число. Дифференцируя (4.11,1) $2n$ раз и принимая во внимание определение полиномов Эрмита (§ 4.9), находим:

$$H_{2n}(x) = \frac{2^{2n+1}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n} \cos 2xt \, dt, \quad (4.11,2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Дифференцирование под знаком интеграла законно, так как при $|x| < a$ интеграл (4.11,1) мажорируется сходящимся интегралом

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2 + 2at} \, dt,$$

поэтому сходится равномерно в круге $|x| \leq a$ произвольного радиуса a .

*) См., например, Г. М. Фихтенгольц [1], н° 481.

Аналогичным образом получается интегральное представление для полиномов Эрмита с нечетным индексом

$$H_{2n+1}(x) = \frac{2^{2n+2}(-1)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2n+1} \sin 2xt \, dt, \quad (4.11,3)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что доказанные равенства (4.11,2—3) могут быть записаны в виде одной формулы

$$H_n(x) = \frac{2^n (-i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + 2itx} t^n \, dt, \quad (4.11,4)$$

пригодной при любых значениях $n = 0, 1, 2, \dots$

§ 4.12. Интегральные уравнения для полиномов Эрмита

Полиномы Эрмита удовлетворяют интегральным уравнениям с симметричными ядрами простого вида. Чтобы вывести эти уравнения, заменим в разложении производящей функции

(4.9,3) x на y , умножим полученный ряд на $e^{ixy - \frac{y^2}{2}}$ ($-\infty < x < \infty$) и проинтегрируем по промежутку $(-\infty, \infty)$. Мы получим тогда:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2yt - t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} \, dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy - \frac{y^2}{2}} \, dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(y)}{n!} t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy - \frac{y^2}{2}} H_n(y) \, dy. \quad (4.12,1)$$

Перемена порядка интегрирования законна, так как, воспользовавшись неравенством $|H_n(x)| \leq t^n H_n(|x|/t)$, мы имеем: *)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{ixy - \frac{y^2}{2}} \right| \, dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|H_n(y)|}{n!} |t^n| \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{|t|}{e}\right)^n}{n!} H_n(|t|/e) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2} + 2|y|t + t^2} \, dy,$$

следовательно, имеет место абсолютная сходимость.

*) Это неравенство вытекает непосредственно из формулы (4.9,2).

Вычисляя интегралы в левой части (4.12,1), находим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2yt - t^2 - \frac{y^2}{2} + ixy} \, dy = \sqrt{2\pi} e^{t^2 + 2txi - \frac{x^2}{2}} =$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ti)^n}{n!} H_n(x). \quad (4.12,2)$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях t в (4.12,1—2) дает искомое интегральное уравнение для полиномов Эрмита:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{1}{i^n \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} e^{-\frac{y^2}{2}} H_n(y) \, dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(4.12,3)$$

Если рассмотреть отдельно случай четного и нечетного n и принять во внимание, что $H_{2m}(x)$ является четной, а $H_{2m+1}(x)$ — нечетной функцией переменного x , то из (4.12,3) вытекают два других интегральных уравнения с вещественными ядрами:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m}(y) \cos xy \, dy, \quad (4.12,4)$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2m+1}(x) = (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} H_{2m+1}(y) \sin xy \, dy, \quad (4.12,5)$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

§ 4.13. Ортогональность полиномов Эрмита

Легко показать, что полиномы Эрмита $H_n(x)$ ортогональны на промежутке $(-\infty, \infty)$ с весом e^{-x^2} , т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) \, dx = 0, \quad (m \neq n). \quad (4.13,1)$$

Действительно, полагая $u_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$ и воспользовавшись уравнением (4.10,5), имеем:

$$u_n'' + (2n + 1 - x^2) u_n = 0, \quad u_m'' + (2m + 1 - x^2) u_m = 0,$$

откуда, умножив первое из этих уравнений на u_m , второе — на u_n , получаем:

$$\frac{d}{dx}(u'_n u_m - u'_m u_n) + 2(n-m)u_m u_n = 0.$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку $(-\infty, \infty)$, находим:

$$(n-m) \int_{-\infty}^{\infty} u_m u_n dx = 0,$$

откуда непосредственно вытекает требуемое равенство (4.13,1).

Значение интеграла (4.13,1) при $m=n$ может быть найдено следующим образом: заменим в рекуррентном соотношении (4.10,1) значок n на $(n-1)$, умножим полученное уравнение на $H_n(x)$, а уравнение (4.10,1) на $H_{n-1}(x)$ и вычтем одно из другого. Мы находим тогда:

$$H'_n(x) + 2(n-1)H_n(x)H_{n-2}(x) - H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - 2nH_{n-1}^2(x) = 0, \quad n=2, 3, \dots$$

Умножая последнее равенство на e^{-x^2} и интегрируя по промежутку $(-\infty, \infty)$, получаем на основании свойства ортогональности (4.13,1):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx, \quad n=2, 3, \dots$$

Последовательное применение этой формулы дает *):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^{n-1} n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi},$$

$$n=2, 3, \dots$$

*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_1^2(x) dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = 2\sqrt{\pi}$$

Непосредственная проверка показывает, что результат справедлив также при $n=0$ и $n=1$. Таким образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.13,2)$$

Формулы (4.13,1—2) играют важную роль в теории разложения функций в ряды по полиномам Эрмита (§ 4.15). Они также показывают, что функции

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} H_n(x) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

образуют ортонормированную систему функций на промежутке $(-\infty, \infty)$.

§ 4.14. Асимптотическое представление полиномов Эрмита для больших значений индекса n

Полиномы Эрмита $H_n(x)$ допускают простые асимптотические представления, удобные для изучения поведения рассматриваемых функций при $n \rightarrow \infty$. Эти представления были впервые получены А. Адамовым *) и играют важную роль в теории разложения произвольных функций в ряды по полиномам Эрмита. Для вывода асимптотических представлений может быть использован общий метод, примененный в § 4.6 для решения аналогичной задачи в теории полиномов Лежандра. При этом мы исходим из дифференциального уравнения (4.10,5) для функции $u = e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, которое мы запишем в форме

$$u'' + (2n+1)u = x^2 u \quad (4.14,1)$$

и проинтегрируем по методу Лагранжа, считая правую часть известной функцией. Принимая во внимание начальные условия $u(0) = H_n(0)$, $u'(0) = H'_n(0)$, получим тогда:

$$u(x) = H_n(0) \cos \sqrt{2n+1} x + H'_n(0) \frac{\sin \sqrt{2n+1} x}{\sqrt{2n+1}} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \int_0^x y^2 u(y) \sin [\sqrt{2n+1} (x-y)] dy. \quad (4.14,2)$$

*) А. Адамов [1].

Если воспользоваться теперь соотношениями:

$$H_{2m}(0) = (-1)^m \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)}, \quad H_{2m+1}(0) = 0, \quad H_{2m}'(0) = 0,$$

$$H_{2m+1}'(0) = 2(-1)^m \frac{\Gamma(2m+2)}{\Gamma(m+1)},$$

вытекающими из формул (4.9,4), (4.10,2) и (1.2,1), то последнее уравнение может быть записано в форме

$$u(x) = \alpha_n \left\{ \cos \left(\sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2} \right) + r_n(x) \right\}, \quad (4.14,3)$$

где α_n обозначает первое или второе из следующих выражений:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\sqrt{2n+1}}, \quad (4.14,4)$$

в зависимости от того, будет n четным или нечетным числом, и

$$r_n(x) = \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \int_0^x y^n u(y) \sin[\sqrt{2n+1}(x-y)] dy. \quad (4.14,5)$$

Для оценки остатка $r_n(x)$ при произвольном вещественном x воспользуемся неравенством Бунаковского — Шварца *). Принимая во внимание (4.13,2), имеем:

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leq \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \left\{ \int_0^{|x|} y^4 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{|x|} u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \left\{ \int_0^{|x|} y^4 dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{\alpha_n \sqrt{2n+1}} \frac{|x|^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \beta_n |x|^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Из формулы Стирлинга следует, что при $n \rightarrow \infty$

$$\alpha_n \approx 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}}, \quad 2^n n! \sqrt{\pi} \approx 2^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \pi, \quad (4.14,6)$$

*) См. примечание на стр. 84.

поэтому произведение $\beta_n |x|^{\frac{5}{2}}$ ограничено при любых $n \geq 0$ и из полученного выше неравенства вытекает

$$|r_n(x)| \leq \frac{C |x|^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}}, \quad (4.14,7)$$

где C — некоторая абсолютная постоянная.

Последнее неравенство показывает, что для любого конечного x имеет место асимптотическая формула

$$u(x) \approx \alpha_n \cos \left(\sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2} \right) \quad (4.14,8)$$

или

$$H_n(x) \approx 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \cos \left(\sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2} \right). \quad (4.14,9)$$

Более точные выражения для полиномов Эрмита $H_n(x)$ с большим индексом n приведены в монографии Сеге *).

§ 4.15. Разложение функций в ряды по полиномам Эрмита

Одним из наиболее важных свойств полиномов Эрмита является возможность представить произвольную функцию $f(x)$, определенную на промежутке $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющую некоторым общим условиям, в виде ряда по этим полиномам:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x), \quad (4.15,1)$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Коэффициенты c_n могут быть формально определены на основании свойства ортогональности (§ 4.13). В самом деле, умножив (4.15,1) на $e^{-x^2} H_m(x)$ и интегрируя почленно по

*) Г. Сеге [1].

промежутку $(-\infty, \infty)$, получаем, принимая во внимание (4.13,1) и (4.13,2):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_m(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = \\ = 2^m m! \sqrt{\pi} c_m,$$

откуда

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x) dx, \quad (4.15,2) \\ n = 0, 1, 2, \dots$$

Следующая теорема устанавливает простые достаточные условия, при выполнении которых ряд (4.15,1) с коэффициентами, вычисленными по формулам (4.15,2), сходится и имеет своей суммой $f(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — произвольная вещественная функция, заданная на интервале $(-\infty, \infty)$ и удовлетворяющая условиям: 1°. $f(x)$ есть кусочно-гладкая функция во всяком конечном интервале $(-a, a)$; 2°. интеграл

$\int_{-\infty}^{\infty} |x| e^{-x^2} f^2(x) dx$ имеет конечное значение. Тогда ряд (4.15,1) с коэффициентами c_n , определенными по формулам (4.15,2), сходится к $f(x)$ во всякой точке x , являющейся точкой непрерывности этой функции.

Для доказательства установим прежде всего, что интегралы (4.15,2) имеют смысл, следовательно, коэффициенты фактически могут быть вычислены. Действительно, эти интегралы, взятые в любых конечных пределах, существуют и, в силу неравенства $|f(x) e^{-x^2} H_n(x)| \leq \frac{1}{2} [f^2(x) e^{-x^2} + H_n^2(x) e^{-x^2}]$, модуль подинтегральной функции в (4.15,2) не превосходит подинтегрального выражения интеграла, сходящегося на основании 2° и (4.13,2). Поэтому несобственные интегралы (4.15,2) сходятся.

Обозначим $S_m(x)$ сумму $(m+1)$ первых членов ряда (4.15,1).

Подставляя значения коэффициентов, получаем:

$$S_m(x) = \sum_{n=0}^m c_n H_n(x) = \\ = \sum_{n=0}^m H_n(x) \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} H_n(y) dy = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} K_m(x, y) dy, \quad (4.15,3)$$

где

$$K_m(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^m \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!}. \quad (4.15,4)$$

Для того чтобы найти значение последней суммы, умножим рекуррентное соотношение для полиномов Эрмита (4.10,1) на $H_n(y)$ и вычтем из полученного уравнения такое же уравнение с переставленными x и y . Тогда получим:

$$[H_{n+1}(x) H_n(y) - H_{n+1}(y) H_n(x)] - 2n [H_n(x) H_{n-1}(y) - H_n(y) H_{n-1}(x)] = 2(x-y) H_n(x) H_n(y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Разделив последнее равенство на $2^n n!$ и суммируя по значку n от 1 до m , находим, принимая во внимание, что $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$:

$$2(x-y) \sum_{n=1}^m \frac{H_n(x) H_n(y)}{2^n n!} = \\ = \frac{H_{m+1}(x) H_m(y) - H_{m+1}(y) H_m(x)}{2^m m!} - 2(x-y),$$

откуда

$$K_m(x, y) = \frac{H_{m+1}(x) H_m(y) - H_{m+1}(y) H_m(x)}{(x-y) \cdot 2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}. \quad (4.15,5)$$

Отметим еще важное тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_m(x, y) e^{-y^2} dy = 1, \quad (4.15,6)$$

непосредственно вытекающее из (4.15,4), если воспользоваться формулами (4.13,1—2)*).

Предположим теперь, что x есть точка непрерывности $f(x)$ и рассмотрим разность $S_m(x) - f(x)$. На основании формул (4.15,3) и (4.15,6) эта разность может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned} S_m(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_m(x, y) e^{-y^2} [f(y) - f(x)] dy = \\ &= \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy - \\ &- \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) \varphi(x, y) dy, \end{aligned} \quad (4.15,7)$$

где для сокращения положено

$$\varphi(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Доказательство теоремы 2 равносильно доказательству утверждения, что правая часть (4.15,7) стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Для этого нам понадобится следующая лемма:

Лемма. Пусть $\varphi(x)$ — произвольная вещественная функция, удовлетворяющая условиям:

1°. $\varphi(x)$ — кусочно-непрерывная функция во всяком конечном интервале $(-a, a)$;

2°. $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^3 e^{-x^2} \varphi^2(x) dx$ имеет конечное значение.

Тогда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (4.15,8)$$

*) На основании этих формул:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(y) e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_n(y) H_0(y) dy = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Для доказательства леммы представим интеграл (4.15,8) в виде суммы интегралов

$$\begin{aligned} J &= \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \\ &= \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} \dots + \int_{-a}^a \dots + \int_a^{\infty} \dots \right\} = \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \quad (4.15,9)$$

Применяя неравенство Буняковского—Шварца, находим:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} |H_n(x)| |\varphi(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left\{ \int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} (-x)^{-3} H_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{-a} (-x)^3 e^{-x^2} \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \left\{ \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_a^{\infty} e^{-x^2} x^{-3} H_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} |x|^3 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.15,10)$$

и, аналогично,

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq \left\{ \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_a^{\infty} e^{-x^2} x^{-3} H_n^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left\{ \int_a^{\infty} e^{-x^2} x^3 \varphi^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.15,11)$$

Докажем, что интеграл

$$I = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_a^\infty e^{-x^2} x^{-3} H_n^2(x) dx \quad (4.15,12)$$

ограничен при любых значениях n , для чего достаточно убедиться в его конечности при $n \rightarrow \infty$.

Представим рассматриваемый интеграл в форме

$$I = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left\{ \int_a^{n^\delta} \dots + \int_{n^\delta}^\infty \dots \right\} = I_1 + I_2 \quad (4.15,13)$$

и выберем число $\delta = \frac{1}{6}$.

Тогда, воспользовавшись (4.13,2), имеем:

$$I_2 \leq \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 1. \quad (4.15,14)$$

С другой стороны, из (4.14,3) и (4.13,7) вытекает:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{a_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_0^{n^\delta} \left(1 + \frac{Cx^{\frac{5}{2}}}{n^{\frac{1}{4}}} \right)^2 x^{-3} dx = \\ &= \frac{a_n^2 n^{\frac{1}{2}}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} x^{-2} + \frac{4C}{n^{\frac{1}{4}}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{C^2}{3n^{\frac{1}{2}}} x^3 \right]_{x=a}^{x=n^\delta} \leq M, \end{aligned} \quad (4.15,15)$$

где M — абсолютная постоянная, так как, согласно (4.14,6), множитель перед квадратной скобкой ограничен при $n \rightarrow \infty$. Из ограниченности I и условия 2° леммы следует, что можно

выбрать такое большое $a = a(\epsilon)$, что каждый из интегралов J_1 и J_2 будет удовлетворять неравенству

$$|J_1| < \frac{1}{3} \epsilon, \quad |J_3| < \frac{1}{3} \epsilon, \quad (4.15,16)$$

где ϵ — произвольно малое положительное число.

Считая в дальнейшем, что a фиксировано указанным образом и заменяя в интеграле J_2 полином Эрмита его выражением (4.14,3), имеем:

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{a_n n^{\frac{1}{4}}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \left[\int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) \cos \sqrt{2n+1} x - \frac{n\pi}{2} dx + \right. \\ \left. + \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \varphi(x) r_n(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (4.15,17)$$

Так как $\varphi(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ — кусочно-непрерывная функция, первый из интегралов стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$. Второй интеграл также стремится к нулю, ибо, в соответствии с (4.14,7), подинтегральное выражение есть $O(n^{-\frac{1}{4}})$, равномерно во всем промежутке $(-a, a)$. Множитель перед квадратными скобками ограничен, поэтому:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_2 = 0. \quad (4.15,18)$$

Из (4.15,16 и 18) следует

$$|J| < \epsilon, \quad n \geq N(\epsilon), \quad (4.15,19)$$

что и доказывает лемму.

Завершение доказательства теоремы 2 теперь может быть получено весьма простым образом.

В самом деле, из условия 1° теоремы вытекает, что $\varphi(x, y)$, рассматриваемая как функция переменного y , есть кусочно-гладкая функция во всяком конечном интервале $(-a, a)$, а из условия 2° следует, что интеграл от

$|y|^3 \varphi^2(y)e^{-y^2}$, взятый по промежутку $(-\infty, \infty)$, имеет конечное значение*). Поэтому, согласно лемме,

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(m+1)^{\frac{1}{4}}}{\{2^{m+1}(m+1)! \sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_{m+1}(y) \varphi(x, y) dy = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^{\frac{1}{4}}}{(2^m m! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} H_m(y) \varphi(x, y) dy = 0. \quad (4.15, 20) \end{aligned}$$

С другой стороны, на основании (4.14, 9) и формулы Стирлинга, каждое из выражений

$$\frac{\{2^{m+1}(m+1)! \sqrt{\pi}\}^{\frac{1}{2}}}{(m+1)^{\frac{1}{4}}} \frac{H_m(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}, \quad \frac{(2^m m! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{1}{4}}} \frac{H_{m+1}(x)}{2^{m+1} m! \sqrt{\pi}}$$

остаётся ограниченным, когда $m \rightarrow \infty$. Поэтому, из (4.15, 7), имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} [S_m(x) - f(x)] = 0, \quad (4.15, 21)$$

что и доказывает теорему.

Можно доказать, что ряд (4.15, 1) сходится также и в точке разрыва $f(x)$ и значение его суммы в этом случае будет $\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)]$.

По поводу доказательств теоремы разложения по полиномам Эрмита при меньших ограничениях, налагаемых на функцию $f(x)$, мы отсылаем читателя к специальной литературе**).

*) Действительно, для достаточно большого положительного $b > x$

$$\begin{aligned} \int_{y=b}^{\infty} |y|^3 \varphi^2(y) e^{-y^2} dy & \leq \left(\frac{b}{b-x}\right)^2 \int_b^{\infty} e^{-y^2} y [f(y) - f(x)]^2 dx \leq \\ & \leq 2 \left(\frac{b}{b-x}\right)^2 \int_b^{\infty} y [f^2(y) + f^2(x)] e^{-y^2} dy \end{aligned}$$

и аналогичная оценка получается для интеграла, взятого по промежутку $(-\infty, -b)$.

***) Г. Сеге [1].

§ 4.16. Примеры разложений функций в ряды по полиномам Эрмита

ПРИМЕР 1. Пусть $f(x) = e^x$, $-\infty < x < \infty$. Условия теоремы 2 выполнены и мы имеем

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + x} H_n(x) dx.$$

Из уравнений (4.10, 2 — 3) следует:

$$H_n(x) e^{-x^2} = -\frac{d}{dx} e^{-x^2} H_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4.16, 1)$$

поэтому, интегрируя по частям, находим:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + x} H_n(x) dx & = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + x} H_{n-1}(x) dx = \\ & = \dots = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + x} dx = \sqrt{\pi} e^{\frac{1}{4}}, \end{aligned}$$

откуда:

$$f(x) = e^x = e^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{2^n n!}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.16, 2)$$

ПРИМЕР 2. Положим $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$.

Так как $f(x)$ — четная функция, то разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} H_{2n}(x),$$

где

$$c_{2n} = \frac{1}{2^{2n} 2n! \sqrt{\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2} H_{2n}(x) dx = -\frac{2e^{-a^2}}{2^{2n} 2n! \sqrt{\pi}} H_{2n-1}(a),$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx = \Phi(a),$$

$n = 1, 2, \dots$

$\Phi(z)$ — интеграл вероятности (§ 2.1).

Таким образом, получаем:

$$f(x) = \Phi(a) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{2n-1}(a)}{2^{2n} 2n!} H_{2n}(x), \quad (4.16,3)$$

$-\infty < x < \infty.$

В заключение заметим, что вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n(x) dx,$$

необходимых для определения коэффициентов разложения функции $f(x)$ в ряд по полиномам Эрмита, во многих случаях может быть произведено путем замены $H_n(x)$ интегральными представлениями (4.11,2—3), а также через сравнение коэффициентов при одинаковых степенях t в левой и правой частях равенства, получающегося из формулы (4.9,3), если умножить последнюю на $e^{-x^2} f(x)$ и проинтегрировать по промежутку $(-\infty, \infty)$.

§ 4.17. Полиномы Лагерра. Определение и производящая функция

К числу ортогональных полиномов, имеющих большое значение для приложений, относятся также полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$, которые для любых вещественных значений $\alpha > -1$ определяются посредством формулы *)

$$L_n^\alpha(x) = e^x \frac{x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.17,1)$$

*) Полиномы $L_n^\alpha(x)$ только постоянным множителем отличаются от полиномов Сонина $T_n^\alpha(x)$, исследованных последним в работе, опубликованной в Math. Ann. 16 (1880). Лагерром изучен частный случай $\alpha = 0$. В литературе полиномы $L_n^\alpha(x)$ иногда называются обобщенными полиномами Лагерра.

Выполнив дифференцирование в правой части, находим:

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = 1 - \alpha - x,$$

$$L_2^\alpha(x) = \frac{1}{2} [(1 + \alpha)(2 + \alpha) - 2(1 + \alpha)x + x^2]$$

и т. д.

Общее выражение для полинома n -го порядка получается путем применения правила Лейбница, что приводит к формуле вида:

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(k + \alpha + 1) k! (n - k)!} (-x)^k, \quad (4.17,2)$$

где для всех $k < n$ отношение гамма-функций может быть заменено произведением

$$(n + \alpha)(n + \alpha - 1) \dots [n + \alpha - (n - k - 1)].$$

Ниже (§ 4.21) будет показано, что полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ ортогональны на промежутке $(0, \infty)$ с весом $p(x) = x^\alpha e^{-x}$.

Полиномы Лагерра встречаются при рассмотрении многих вопросов математической физики, например, при интегрировании уравнения Гельмгольца в параболических координатах, в теории атома водорода, в теории распространения электромагнитных колебаний вдоль длинных линий и т. д.

Простейший класс полиномов Лагерра составляют полиномы $L_n^0(x) = L_n(x)$. Другой важный частный случай представляют полиномы $L_n^{\pm \frac{1}{2}}(x)$, просто связанные с полиномами Эрмита (§ 4.19).

Теория полиномов Лагерра может быть развита, исходя из представления этих полиномов как коэффициентов в разложении производящей функции:

$$\varpi(x, t) = (1 - t)^{-\alpha - 1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n, \quad |t| < 1. \quad (4.17,3)$$

Чтобы установить справедливость этого разложения, заметим, что левая часть есть функция комплексного переменного t , регулярная в круге $|t| < 1$, поэтому в рассматриваемой области должно иметь место разложение вида:

$$w(x, t) = (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\alpha(x) t^n.$$

Согласно известной теореме теории функций коэффициенты $c_n^\alpha(x)$ могут быть выражены через контурные интегралы

$$c_n^\alpha(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_C (1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{xt}{1-t}} t^{-n-1} dt, \quad (4.17,4)$$

взятые по произвольному замкнутому контуру C , охватывающему точку $t=0$ и расположенному внутри круга $|t| < 1$. Выбирая контур C достаточно малых размеров и вводя новое переменное интегрирования $u = \frac{x}{1-t}$, находим:

$$c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{2\pi i} \int_C \frac{e^{-u} u^{n+\alpha}}{(u-x)^{n+1}} du, \quad (4.17,5)$$

где C' — малый замкнутый контур, охватывающий точку $u=x$. Последние интегралы могут быть вычислены с помощью теории вычетов, что дает

$$c_n^\alpha(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \left\{ \frac{d^n}{du^n} e^{-u} u^{n+\alpha} \right\}_{u=x} \equiv L_n^\alpha(x),$$

откуда непосредственно следует справедливость разложения (4.17,3).

§ 4.18. Рекуррентные соотношения и дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра

Полиномы Лагерра удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, связывающим полиномы с различными индексами. Эти соотношения могут быть выведены из разложения производящей функции (4.17,3), если принять во внимание

дифференциальные уравнения для $w(x, t)$. Так, например, из легко проверяемого тождества

$$(1-t)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + [x - (1-t)(1+\alpha)] w = 0$$

следует, после подстановки разложения (4.17,3),

$$(1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n L_n^\alpha(x) t^{n-1} + [x - (1-t)(1+\alpha)] \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^n = 0,$$

откуда, приравнявая нулю коэффициент при t^n , получаем:

$$(n+1) L_{n+1}^\alpha(x) + (x - \alpha - 2n - 1) L_n^\alpha(x) + (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \quad (4.18,1)$$

$n = 1, 2, \dots$

Аналогичным образом из тождества

$$(1-t) \frac{\partial w}{\partial x} + t w = 0$$

находим *):

$$(1-t) \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + \sum_{n=0}^{\infty} L_n^\alpha(x) t^{n+1} = 0,$$

откуда имеем:

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} - \frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx} + L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.18,2)$$

*) Для обоснования возможности дифференцирования ряда (4.17,3), члены которого регулярные функции, достаточно доказать равномерную сходимость этого ряда. Пусть $|x| < a$, a — любое конечное число. Из (4.17,2) тогда следует, что, при всяком $\alpha > -1$, $|L_n^\alpha(x)| \leq L_n^\alpha(-a)$, поэтому ряд (4.17,3) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t|^n L_n^\alpha(-a) = (1-|t|)^{-\alpha-1} e^{\frac{a|t|}{1-|t|}}$$

и сходится равномерно в рассматриваемой области.

Исключая $L_{n-1}^\alpha(x)$ из уравнений (4.18,1—2), получаем*):

$$(x-n-1) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + (n+1) \frac{dL_{n+1}^\alpha(x)}{dx} + \\ + (2n-2+\alpha-x) L_n^\alpha(x) - (n+1) L_{n-1}^\alpha(x) = 0, \\ n=0, 1, 2, \dots \quad (4.18,3)$$

Наконец, заменив в последнем равенстве n на $(n-1)$ и исключая производную $\frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx}$ с помощью соотношения (4.18,2), находим:

$$x \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = nL_n^\alpha(x) - (n+\alpha) L_{n-1}^\alpha(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18,4)$$

Последняя формула дает возможность выразить производную от полинома Лагерра через эти полиномы.

Рекуррентные соотношения другого типа, содержащие полиномы с разными верхними индексами, получаются, если рассматривать производящую функцию также как функцию параметра α и установить связь между $w(x, t, \alpha)$ и $w(x, t, \alpha+1)$.

Первое из этих соотношений вытекает из тождества:

$$(1-t)w(x, t, \alpha+1) = w(x, t, \alpha).$$

Подставляя разложение (4.17,3) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t в левой и правой частях равенства, выводим:

$$L_n^{\alpha+1}(x) - L_{n+1}^\alpha(x) = L_n^\alpha(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18,5)$$

Аналогичным образом из соотношения

$$\frac{\partial w(x, t, \alpha)}{\partial x} = -tw(x, t, \alpha+1)$$

вытекает другая полезная формула рассматриваемого типа:

$$\frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} = -L_{n-1}^{\alpha+1}(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (4.18,6)$$

* В последующих рассуждениях справедливость полученных соотношений при первых значениях n не вытекает из общих формул, однако легко проверяется подстановкой полиномов $L_0^\alpha(x)$, $L_1^\alpha(x)$, ...

Пользуясь рекуррентными соотношениями (4.18,2) и (4.18,4), легко получить дифференциальное уравнение для полиномов Лагерра. Для этого продифференцируем (4.18,4) по x и исключим $\frac{dL_{n-1}^\alpha(x)}{dx}$ и $L_{n-1}^\alpha(x)$ с помощью соотношений (4.18,2) и (4.18,4). Мы имеем тогда:

$$x \frac{d^2 L_n^\alpha(x)}{dx^2} + (1+\alpha-x) \frac{dL_n^\alpha(x)}{dx} + nL_n^\alpha(x) = 0, \\ n=0, 1, 2, \dots \quad (4.18,7)$$

Последний результат показывает, что функция $u = L_n^\alpha(x)$ является частным решением дифференциального уравнения второго порядка

$$xu'' + (1+\alpha-x)u' + nu = 0. \quad (4.18,8)$$

Уравнение (4.18,8) встречается в математической физике и играет важную роль в теории полиномов Лагерра. С помощью замены переменных можно получить ряд других уравнений, интегралы которых могут быть выражены через полиномы Лагерра. Так, нетрудно проверить, что дифференциальные уравнения (4.18,9—11) имеют частные решения, указанные в соответствующих строчках:

$$xu'' + (1+\alpha-2x)u' + \left[n + \frac{1+\alpha}{2} - \frac{x}{4} + \right. \\ \left. + \frac{\nu(\nu-\alpha)}{x} \right] u = 0, \quad u = e^{-\frac{x}{2}} x^\nu L_n^\alpha(x); \quad (4.18,9)$$

$$u'' + \left[4n + 2\alpha + 2 - x^2 + \frac{1-\alpha^2}{x^2} \right] u = 0, \\ u = e^{-\frac{x^2}{2}} x^{\alpha+\frac{1}{2}} L_n^\alpha(x^2) \quad (4.18,10)$$

и т. д.

§ 4.19. Интегральные представления для полиномов Лагерра. Связь между полиномами Лагерра и Эрмита

Полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ допускают простое представление с помощью определенных интегралов, содержащих переменное x как параметр. Для того чтобы получить это

представление, предположим, что x — вещественное положительное число и воспользуемся формулой

$$x^{\nu} e^{-x} = \int_0^{\infty} (\sqrt{xt})^{n+\alpha} J_{n+\alpha}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \quad (4.19,1)$$

где $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя порядка ν .*

Дифференцируя (4.19,1) по x и принимая во внимание равенство

$$\frac{d}{du} u^{\frac{\nu}{2}} J_{\nu}(2\sqrt{u}) = u^{\frac{\nu-1}{2}} J_{\nu-1}(2\sqrt{u}),$$

вытекающее из (5.3,7), если положить в первой из формул $z = 2\sqrt{u}$, находим последовательно

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} (x^{m+\alpha} e^{-x}) &= \\ &= \int_0^{\infty} (\sqrt{xt})^{n-m+\alpha} J_{m-n+\alpha}(2\sqrt{xt}) t^m e^{-t} dt, \end{aligned} \quad (4.19,2)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$

Законность дифференцирования под знаком интеграла может быть легко обоснована.

Полагая в (4.19,2) $m = n$ и принимая во внимание формулу (4.17,1), получаем искомое интегральное представление для полиномов Лагерра:

$$\left. \begin{aligned} L_n^{\alpha}(x) &= \frac{e^{\alpha x}}{n!} \int_0^{\infty} t^{n+\frac{\alpha}{2}} J_{\frac{\alpha}{2}}(2\sqrt{xt}) e^{-t} dt, \\ \alpha &> -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (4.19,3)$$

Формула (4.19,3) доказана в предположении, что x — вещественное положительное число, однако с помощью принципа аналитического продолжения ее легко распространить на любые комплексные значения x .

*) В отношении функций Бесселя см. гл. V. Формула (4.19,1) является следствием формулы (5.15,2), если положить в последней

$$a = 1, \quad b = 2\sqrt{x}, \quad x = \sqrt{t}, \quad \nu = n + \alpha.$$

Из (4.19,3) можно вывести одно важное следствие, если положить $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ и принять во внимание известные формулы теории бесселевых функций (5.8,1—2). Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} \cos 2\sqrt{xt} dt = \\ &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n} \cos 2\sqrt{xu} du, \end{aligned} \quad (4.19,4)$$

$$\begin{aligned} L_n^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{e^x}{n! \sqrt{\pi} \sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-t} t^n \sin 2\sqrt{xt} dt = \\ &= \frac{e^x}{n! \sqrt{x}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2n+1} \sin 2\sqrt{xu} du, \end{aligned}$$

откуда, на основании формул (4.11,2—3), следует:

$$\begin{aligned} L_n^{-\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} H_{2n}(\sqrt{x}), \\ L_n^{\frac{1}{2}}(x) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+1} n!} \frac{H_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (4.19,5)$$

где $H_n(x)$ — полином Эрмита n -го порядка.

Полученные формулы (4.19,5), устанавливающие связь между двумя классами ортогональных полиномов, позволяют рассматривать теорию полиномов Эрмита как специальный раздел теории полиномов Лагерра.

§ 4.20. Интегральное уравнение для полиномов Лагерра

Полиномы Лагерра удовлетворяют простому интегральному уравнению с симметричным ядром. Для того чтобы получить это уравнение, воспользуемся разложением (4.17,3)

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{-\frac{vt}{1-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) t^n, \quad |t| < 1, \quad \alpha > -1, \quad (4.20.1)$$

*) Заметим, что справедливость соотношений (4.19,5) может быть установлена также непосредственно из разложений (4.17,2) и (4.9,2).

заменяем в нем x на y , умножим на $e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\sqrt{xy})$, где $J_{\alpha}(z)$ — функция Бесселя порядка α , и проинтегрируем по промежутку $(0, \infty)$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2} \frac{1+t}{1-t}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) dy = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) L_n^{\alpha}(y) dy, \end{aligned} \quad (4.20,2)$$

при условии, что почленное интегрирование ряда законно. Последнее нетрудно обосновать, если предположить, что $|t| < \frac{1}{3}$. Действительно, воспользовавшись неравенствами)

$$|L_n^{\alpha}(x)| \leq L_n^{\alpha}(-x), \quad |J_{\alpha}(x)| \leq I_{\alpha}(x), \quad x \geq 0, \quad \alpha > -1,$$

$I_{\alpha}(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} |J_{\alpha}(\sqrt{xy})| e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n |L_n^{\alpha}(y)| dy \leq \\ \leq \int_0^{\infty} I_{\alpha}(\sqrt{xy}) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} |t|^n L_n^{\alpha}(-y) dy = \\ = (1-|t|)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} I_{\alpha}(\sqrt{xy}) y^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{y}{2} \frac{1-|t|}{1+|t|}} dy, \end{aligned}$$

где для суммирования ряда снова использована формула (4.20,1).

При $|t| < \frac{1}{3}$, $\alpha > -1$ последний интеграл сходится, в чем нетрудно убедиться, рассматривая асимптотическое поведение функции $I_{\alpha}(x)$ при больших и малых x . Поэтому имеет место абсолютная сходимость правой части равенства (4.20,2), обеспечивающая законность изменения порядка суммирования и интегрирования.

*) Первое из этих неравенств следует из формулы (4.17,2), второе вытекает из разложения функций Бесселя в степенные ряды.

Полагая для вычисления интеграла в левой части (4.20,2) $\sqrt{y} = u$ и воспользовавшись формулой (5.15,2), получаем при $|t| < 1$ *):

$$\begin{aligned} (1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2} \frac{1+t}{1-t}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) dy = \\ = 2(1+t)^{-\alpha-1} x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2} \frac{1-t}{1+t}} = 2x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{\alpha}(x) (-t)^n. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $|t| < \frac{1}{3}$ справедливо равенство

$$2x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n^{\alpha}(x) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{\infty} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) L_n^{\alpha}(y) dy,$$

откуда, если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t , следует искомое интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n}{2} \int_0^{\infty} J_{\alpha}(\sqrt{xy}) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(y) dy, \quad (4.20,3) \\ \alpha > -1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

При $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ это уравнение переходит в соответствующие интегральные уравнения для полиномов Эрмита (4.11,2—3).

§ 4.21. Ортогональность полиномов Лагерра

Одним из наиболее важных свойств полиномов Лагерра является ортогональность этих полиномов на промежутке $(0, \infty)$ с весом $e^{-x} x^{\alpha}$. Для того чтобы получить это свойство, положим $u_n(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(x)$ и заметим, что на

*) Для таких t , $R\left(\frac{1+t}{1-t}\right) > 0$, поэтому условие сходимости выполнено.

основании (4.18,9) функции $u_n(x)$ и $u_m(x)$ удовлетворяют уравнениям:

$$(xu_n') + \left(n + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_n = 0,$$

$$(xu_m') + \left(m + \frac{\alpha+1}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\alpha^2}{4x} \right) u_m = 0.$$

Умножая первое из этих уравнений на u_m , второе на u_n и интегрируя по промежутку $(0, \infty)$, находим:

$$x(u_n' u_m - u_m' u_n) \Big|_0^\infty + (n-m) \int_0^\infty u_m u_n dx = 0.$$

При $\alpha > -1$ первое слагаемое исчезает на обоих пределах*), поэтому для всех $m \neq n$

$$\int_0^\infty u_m u_n dx = 0,$$

или

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_m^\alpha(x) L_n^\alpha(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad \alpha > -1. \quad (4.21,1)$$

Чтобы найти значение интеграла (4.21,1) при $m=n$, умножим соотношение (4.18,1) на $L_{n-1}^\alpha(x)$, уравнение, полученное из (4.18,1) заменой n на $(n-1)$, умножим на $L_{n-1}^\alpha(x)$, и вычтем одно из другого. Тогда получим:

$$n [L_n^\alpha(x)]^2 - (n+\alpha) [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 - (n+1) L_{n+1}^\alpha(x) L_{n-1}^\alpha(x) + 2L_n^\alpha(x) L_{n-1}^\alpha(x) + (n+\alpha-1) L_n^\alpha(x) L_{n-2}^\alpha(x) = 0, \\ n=2, 3, \dots$$

Умножая последнее равенство на $x^\alpha e^{-x}$ и интегрируя по промежутку $(0, \infty)$, получаем на основании свойства ортогональности (4.21,1):

$$n \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = (n+\alpha) \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_{n-1}^\alpha(x)]^2 dx, \quad n=2, 3, \dots$$

*) Если подставить u_m и u_n , то легко видеть, что это слагаемое есть $O(x^{1+\alpha})$ при $x \rightarrow 0$.

Последовательное применение этой формулы дает*):

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \\ = \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1) \dots (\alpha+2)}{n(n-1) \dots 3 \cdot 2} \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2 dx = \\ = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \quad n=2, 3, \dots$$

Прямая проверка показывает, что полученная формула остается справедливой также при $n=0$ и $n=1$. Таким образом:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_n^\alpha(x)]^2 dx = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!}, \\ n=0, 1, 2, \dots, \quad \alpha > -1. \quad (4.21,2)$$

Формулы (4.21,1—2) играют важную роль в теории разложения функций по полиномам Лагерра (§ 4.23). Из этих формул следует также, что функции

$$\varphi_n(x) = \left\{ \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \right\}^{\frac{1}{2}} L_n^\alpha(x), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

образуют ортонормированную систему на промежутке $(0, \infty)$

§ 4.22. Асимптотическое представление полиномов Лагерра для больших значений индекса n

Полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$, так же как другие ортогональные полиномы, допускают простые аналитические представления при $n \rightarrow \infty$.

Для вывода этих формул положим

$$u = e^{-\frac{x}{2}} L_n^\alpha(x) \quad (4.22,1)$$

*) Непосредственное вычисление показывает, что

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha [L_1^\alpha(x)]^2 dx = \int_0^\infty e^{-x} x^\alpha (1+\alpha-x)^2 dx = (\alpha+1) \Gamma(\alpha+1).$$

и заметим, что u представляет собой интеграл дифференциального уравнения

$$xu'' + (\alpha + 1)u' + \left(n + \frac{\alpha + 1}{2}\right)u = \frac{xu}{4}, \quad (4.22,2)$$

регулярный в окрестности точки $x=0$ и удовлетворяющий начальному условию:

$$u(0) = L_n^\alpha(0) = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (4.22,3)$$

Дальнейший ход рассуждений несколько зависит от того, будет параметр α положительным или отрицательным, однако это различие не принципиального характера, в связи с чем мы ограничимся только случаем $\alpha \geq 0$.

Если рассматривать правую часть уравнения (4.22,2) как заданную функцию, то, применяя метод Лагранжа, находим *):

$$u(x) = A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \frac{\pi}{4N} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] dy, \quad (4.22,4)$$

где

$$u_1(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} J_\alpha(2\sqrt{Nx}); \quad u_2(x) = (\sqrt{Nx})^{-\alpha} Y_\alpha(2\sqrt{Nx});$$

$J_\alpha(x)$, $Y_\alpha(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода, $N = n + \frac{1}{2}(\alpha + 1)$.

Принимая во внимание асимптотическое поведение функций Бесселя (5.16,1—2), заключаем, что при $x \rightarrow 0$ $u_1(x) \rightarrow \{\Gamma(1 + \alpha)\}^{-1}$, $u_2(x) \rightarrow \infty$, а интегральный член есть $O(x^2)**$, поэтому значения постоянных интегрирования в (4.22,4) будут

$$A_1 = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}, \quad A_2 = 0, \quad (4.22,5)$$

*) (u_1, u_2) образуют систему решений однородного уравнения

$$xu'' + (\alpha + 1)u' + \left(n + \frac{\alpha + 1}{2}\right)u = 0,$$

с вронскианом

$$W\{u_1, u_2\} = \frac{N}{\pi} (Nx)^{-\alpha-1}.$$

***) За исключением случая $\alpha=0$, когда этот член есть

$$O\left(x^2 \ln \frac{1}{x}\right).$$

и это равенство может быть записано в виде

$$u(x) = A_1 [u_1(x) + r_n(x)], \quad (4.22,6)$$

где

$$r_n(x) = \frac{\pi}{4A_1 N} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} u(y) [u_1(y) u_2(x) - u_1(x) u_2(y)] dy. \quad (4.22,7)$$

Покажем, что при фиксированном $x \geq 0$ и $n \rightarrow \infty$ величина остаточного члена в формуле (4.22,6) будет мала по сравнению с первым слагаемым. При доказательстве будем различать два случая: 1°. $0 \leq x \leq N^{-1}$; 2°. $x > N^{-1}$, и предварительно установим верхнюю границу модуля $u(x)$ для интервала $(0, N^{-1})$, которую мы обозначим M_n .

Согласно § 5.16, мы имеем при $0 \leq x \leq N^{-1}$:

$$u_1(x) = O(1), \quad u_2(x) = \begin{cases} O(N^{-\alpha} x^{-\alpha}), & \alpha > 0 \\ O(\ln N^{-1} x^{-1}), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (4.22,8)$$

поэтому из (4.22,4—5), в предположении $\alpha > 0$, следует:

$$|u(x)| \leq A_1 O(1) + M_n N^{-1} \int_0^x (Ny)^{\alpha+1} [O(N^{-\alpha} x^{-\alpha}) + O(N^{-\alpha} y^{-\alpha})] dy = A_1 O(1) + M_n x^2 O(1) = A_1 O(1) + M_n O(N^{-2}),$$

откуда вытекает, что при больших n

$$M_n = A_1 O(1). \quad (4.22,9)$$

Полученный результат остается справедливым и для $\alpha = 0$. Воспользовавшись (4.22,9), находим, что при $0 \leq x \leq N^{-1}$, $\alpha > 0$,

$$|r_n(x)| \leq x^2 O(1) = O(N^{-2}). \quad (4.22,10)$$

Для тех же значений x и $\alpha = 0$ получаем:

$$|r_n(x)| \leq x^2 \ln(N^{-1} x^{-1}) O(1) = O(N^{-2}). \quad (4.22,11)$$

Для оценки $r_n(x)$ при $x \geq N^{-1}$ представим (4.22,7) в виде суммы интегралов:

$$r_n(x) = \frac{\pi}{4A_1 N} \left\{ \int_0^{\frac{1}{N}} + \int_{\frac{1}{N}}^x \right\} = J_1 + J_2. \quad (4.22,12)$$

Так как в интервале (N^{-1}, ∞) , в соответствии с § 5.16,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \\ u_2(x) &= O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right), \end{aligned} \quad (4.22,13)$$

то, так же как и выше, имеем при $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq N^{-1} \int_0^{\frac{1}{N}} (Ny)^{\alpha-1} (Nx)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} [O(1) + O(N^{-\alpha}y^{-\alpha})] dy = \\ &= N^{-2} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \end{aligned} \quad (4.22,14)$$

Оценка справедлива и в том случае, когда $\alpha = 0$.

Далее мы имеем:

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq (A_1 N)^{-1} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \times \\ &\times \int_{\frac{1}{N}}^x (Ny)^{\alpha-1} |u(y)| (Ny)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} dy \leq \\ &\leq A_1^{-1} N^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \int_0^x y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} |u(y)| dy. \end{aligned}$$

На основании неравенства Буняковского—Шварца и формулы (4.21,2) находим:

$$\begin{aligned} \int_0^x y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}} |u(y)| dy &\leq \left\{ \int_0^x y^{\alpha+\frac{3}{2}} dy \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} u^2(y) dy \right\}^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{A_1^{\frac{1}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}}}{\left(\alpha + \frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$|J_2| \leq A_1^{-\frac{1}{2}} N^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}+\frac{5}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right),$$

или, так как, согласно (4.22,5), $A_1 = O(N^\alpha)$, то

$$|J_2| \leq N^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right). \quad (4.22,15)$$

Из (4.22,12), (4.22,14) и (4.22,15) получаем, что при $x \geq N^{-1}$

$$\begin{aligned} |r_n(x)| &\leq O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\right) \times \\ &\times \left[N^{-\frac{1}{4}} x^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}} + N^{-2} O(1) \right]. \end{aligned} \quad (4.22,16)$$

Сравнение (4.22,8) с (4.22,10—11) и (4.22,13) с (4.22,16) показывает, что для всех $0 \leq x \leq a$ (a — произвольное конечное число) величина остаточного члена в (4.22,6) будет мала по сравнению с $u_1(x)$, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$u(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} A_1 u_1(x), \quad (4.22,17)$$

или

$$\left. \begin{aligned} L_n^\alpha(x) &\underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} e^{\frac{x}{2}} (Nx)^{-\frac{\alpha}{2}} J_\alpha(2\sqrt{Nx}), \\ N &= n + \frac{\alpha+1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.22,18)$$

Для интервала $0 < \delta \leq x \leq a$ можно заменить функцию Бесселя ее асимптотическим представлением (5.16,1) и преобразовать полученную формулу к более простому виду:

$$L_n^\alpha(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\approx} \pi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} n^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4.22,19)$$

§ 4.23. Разложение функций в ряды по полиномам Лагерра

К числу свойств полиномов Лагерра, общих свойствам других ортогональных полиномов, относится возможность представления произвольной функции $f(x)$, определенной на

промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяющей некоторым условиям, рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^\alpha(x), \quad 0 < x < \infty, \quad (4.23,1)$$

где, в соответствии с формулами (4.21,1—2), коэффициенты определяются при помощи равенств:

$$c_n = \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} \int_0^{\infty} f(x) e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx. \quad (4.23,2)$$

Для обоснования справедливости разложения достаточно предположить кусочную гладкость функции $f(x)$ в открытом интервале $(0, a)$ и наложить некоторые ограничения на поведение функции в окрестности точек $x=0$ и $x=\infty$. В частности имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, определенная на промежутке $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условию: 1°. $f(x)$ — кусочно-гладкая функция во всяком открытом интервале $(0, a)$; 2°. интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{4}} |f(x)| dx$$

имеет конечное значение.

Тогда ряд (4.23,1) с коэффициентами (4.23,2) сходится и его сумма равна $f(x)$ в каждой точке x , где эта функция непрерывна.

В точке разрыва ряд сходится к $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

Доказательство теоремы может быть дано с помощью методов, аналогичных использованным при доказательстве соответствующей теоремы разложения для полиномов Эрмита (§ 4.15)*.

В виде простого примера получим разложение функции $f(x) = e^{-x}$. Значение интеграла, входящего в формулу (4.23,2), может быть найдено с помощью следующего приема, полезного во многих случаях.

* См. Сеге [1]; Короус [1].

По поводу доказательства теоремы разложения при более строгих условиях см. монографию Сеге [1] и цитированную там литературу.

Умножим равенство (4.17,3) на $e^{-2x} x^\alpha$ и проинтегрируем почленно по промежутку $(0, \infty)$. Тогда имеем:

$$(1-t)^{-\alpha-1} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{2-t}{1-t} x^\alpha dx = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{\infty} e^{-2x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx,$$

откуда, после вычисления интеграла в левой части равенства, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2-t)^{\alpha+1}} &= \frac{1}{2^{\alpha+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1) t^n}{n! 2^n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n \int_0^{\infty} e^{-2x} x^\alpha L_n^\alpha(x) dx. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t и подставляя полученное значение интеграла в (4.23,2), приходим к искомому разложению:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^\alpha(x)}{2^{n+\alpha+1}}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (4.23,3)$$

§ 4.24. Приложение к теории распространения электромагнитных волн вдоль длинных линий. Отражение от конца линии, замкнутой на сосредоточенную индуктивность

В качестве любопытного примера приложения полиномов Лагерра к техническим проблемам рассмотрим задачу о распространении электромагнитных волн вдоль линии передачи, один конец которой в момент $t=0$ подключается к источнику с постоянной э.д.с. E , а другой замкнут на катушку самоиндукции L_0 (рис. 12).

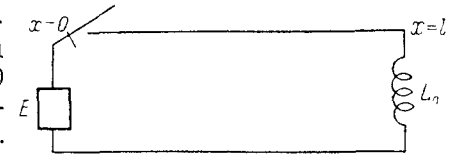


Рис. 12.

Если обозначить через $\varphi = \varphi(x, t)$, $i = i(x, t)$, мгновенные значения напряжения и тока, L и C — самоиндукцию и емкость на единицу длины линии, то рассматриваемая

задача сводится к интегрированию системы линейных уравнений

$$-\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = L \frac{\partial i}{\partial t}, \quad -\frac{\partial i}{\partial x} = C \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} \quad (4.24,1)$$

при начальных условиях

$$\bar{z}|_{x=0} = i|_{t=0} = 0 \quad (4.24,2)$$

и граничных условиях:

$$\bar{z}|_{x=0} = E, \quad \bar{z}|_{x=l} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} \Big|_{x=l}. \quad (4.24,3)$$

Эффективный метод решения этих уравнений заключается в применении к ним преобразования Лапласа (§ 2.6), в результате которого рассматриваемые уравнения переводятся в обыкновенные дифференциальные уравнения для функций $\bar{\varphi}$ и \bar{i} , где \bar{f} обозначает преобразование Лапласа от функции f :

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f e^{-pt} dt. \quad (4.24,4)$$

Если исключить \bar{i} , то для определения $\bar{\varphi}$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}}{dx^2} - LCp^2 \bar{\varphi} = 0 \quad (4.24,5)$$

с граничными условиями

$$\bar{\varphi} \Big|_{x=0} = \frac{E}{p}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dx} \Big|_{x=l} = 0, \quad (4.24,6)$$

откуда следует

$$\bar{\varphi} = \frac{\operatorname{ch} \frac{p}{v}(l-x) + \frac{Z}{L_0 p} \operatorname{sh} \frac{p}{v}(l-x)}{\operatorname{ch} \frac{p}{v} l + \frac{Z}{L_0 p} \operatorname{sh} \frac{p}{v} l} \frac{E}{p}, \quad (4.24,7)$$

где $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — скорость распространения волны вдоль линии,

$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$ — волновое сопротивление.

Переход к первичной функции φ может быть совершён с помощью формулы обращения

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{\varphi} e^{pt} dp, \quad (4.24,8)$$

где интегрирование производится вдоль прямой (L) , параллельной мнимой оси и выбранной таким образом, чтобы особые точки $\bar{\varphi}$ лежали слева от нее.

В дальнейшем нас будет интересовать значение напряжения на конце линии, в соответствии с чем положим в формулах (4.24,7—8) $x=l$. Мы находим тогда:

$$\frac{(-)_{x=l}}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{e^{pt}}{p \operatorname{ch} pT + \alpha \operatorname{sh} pT} dp, \quad (4.24,9)$$

где $T = \frac{l}{v}$ — время пробега волны от одного конца линии до другого, $\alpha = \frac{Z}{L_0}$.

Для того чтобы получить решение задачи в форме, допускающей простую физическую интерпретацию, разложим $(\bar{\varphi})_{x=l}$ по степеням e^{-2pT} и проинтегрируем почленно. Мы имеем тогда:

$$\frac{(-)_{x=l}}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2-i} \int_{(L)} \left(\frac{p-\alpha}{p+\alpha} \right)^n \frac{e^{p[t-(2n+1)T]}}{p+\alpha} dp,$$

или, если ввести новое переменное интегрирования $q = \frac{p-\alpha}{2i}$,

$$\frac{(-)_{x=l}}{2E} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2\alpha)^n e^{-\alpha[t-(2n+1)T]} \times \int_{(L')} \left(1 - \frac{1}{q} \right)^n e^{2qa[t-(2n+1)T]} \frac{dq}{q}, \quad (4.24,10)$$

где (L') — прямая, параллельная (L) .

Вычисление интеграла

$$F(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L')} \left(1 - \frac{1}{q} \right)^n \frac{e^{q\tau}}{q} dq \quad (4.24,11)$$

может быть произведено с помощью теории вычетов, если дополнить контур до замкнутого дугой круга произвольно большого радиуса, расположенной слева от (L') , если $\tau > 0$, и справа от нее, если $\tau < 0$.

В первом случае значение интеграла будет

$$F(\tau) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dq^n} (q-1)^n e^{q\tau} \right\}_{q=0} = \\ = \frac{e^\tau}{n!} \left\{ \frac{d^n}{dy^n} y^n e^{-y} \right\}_{y=-\tau} = L_n(\tau), \quad (4.24,12)$$

где $L_n(\tau)$ — полином Лагерра n -го порядка (§ 4.17); во втором — это значение равно нулю.

Воспользовавшись полученным результатом, находим $(\varphi)_{x-l} = 0$ при $0 \leq t < T$ и

$$\frac{(\varphi)_{x-l}}{2E} = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (2\alpha)^n e^{-\alpha[t-(2n+1)T]} \times \\ \times L_n\{2\alpha[t-(2n+1)T]\} \quad (4.24,13)$$

для

$$T \leq t < (2N+1)T, \quad N=1, 2, \dots$$

Решение представляется в замкнутой форме; добавление новых слагаемых в сумме (4.24,13), происходящее через интервалы $2T$, соответствует приходу в точку $x=l$ отраженных волн.

Метод применим для других типов нагрузки линии, причем во многих случаях решение также выражается через полиномы Лагерра.

§ 4.25. Таблицы ортогональных полиномов

Из ортогональных полиномов лучше других табулированы полиномы Лежандра, для которых мы можем указать следующие таблицы *):

1. Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат (1948):

$$\frac{P_n(x), \quad x=0 (0,01) 1; \quad n=1 (1) 7, \quad 4 \text{ зн.}}{P_n(\cos \theta), \quad \theta=0 (1^\circ) 90^\circ;}$$

*) Объяснение обозначений дано в § 1.6.

2. Я. Н. Шпильрейн, Таблицы специальных функций. Гостехиздат (1933):

$$\frac{P_n(x), \quad x=0 (0,01) 1, \quad n=1 (1) 7, \quad 4 \text{ зн.}}{P_n(\cos \theta), \quad \theta=0 (1^\circ) 90^\circ, \quad n=1 (1) 7, \quad 5 \text{ зн.}}$$

3. К. Хайяши (K. Hayashi), Fünfstellige Funktionentafeln. Berlin (1930):

$$\frac{P_n(x), \quad x=0 (0,01) 1, \quad n=1 (1) 10,}{P_n(\cos \theta), \quad \theta=0^\circ (1^\circ) 90^\circ, \quad n=1 (1) 10.}$$

4. British Association Mathematical Tables, Legendre Polynomials. Cambridge (1946):

$$\frac{P_n(x), \quad x=0 (0,01) 6, \quad n=1 (1) 12 \quad 7 \text{ зн.}}{x=6 (0,01) 11, \quad n=1 (1) 6}$$

Последняя таблица является, по видимому, наиболее полной из существующих.

Значения полиномов Эрмита приведены в таблицах:

5. Дж. Рассел (J. B. Russell), Journal of Math. and Physics, 12 (1933), 291—297:

$$e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad x=0 (0,04) 1 (0,1) 4 (0,2) 7 (0,5) 8, \quad n=0 (1) 11.$$

6. British Association Mathematical Tables, 1. Cambridge (1946):

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{(\sqrt{2})^n}, \quad x=-7 (0,1) 6,6; \quad n=0 (1) 6.$$

Нам не удалось найти в литературе ссылок на соответствующие опубликованные таблицы для полиномов Лагерра. Некоторые указания по этому поводу читатель может найти в цитированной выше монографии Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

Упражнения

1. Показать, что все корни уравнения $P_n(x) = 0$ вещественны и лежат в интервале $(-1, 1)$.

Указание. Применить теорему Ролля.

2. Показать, что все корни уравнения $H_n(x) = 0$ вещественны.

9 Н. Лебедев

3. Воспользовавшись интегральным представлением (4.11,4) для полиномов Эрмита, доказать формулу:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}}{2^n n!} H_n(x) H_n(y) t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}(x^2-y^2) - \frac{(x-y)t^2}{1-t^2}}, \quad |t| < 1. \quad (A)$$

Рассматриваемое равенство играет важную роль в теории полиномов Эрмита. В частности, полагая $y=x$, находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-x^2} H_n^2(x)}{2^n n!} t^n = (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-x^2 \frac{1-t}{1+t}}, \quad |t| < 1. \quad (B)$$

Доказательства рассматриваемых формул можно найти, например, в монографии Титчмарша (Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат (1948), стр. 104—105).

4. Вычисление интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} H_n^2(x) dx$$

во многих случаях может быть выполнено при помощи следующего приема: умножим (B) на $f(x)$, проинтегрируем по промежутку $(-\infty, \infty)$ и вычислим значение интеграла в правой части равенства $\varphi(t)$; разложим $\varphi(t)$ в степенной ряд и сравним коэффициенты при одинаковых степенях t в обеих частях рассматриваемого равенства. Применяя данную методику, показать, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx &= 2^n n! \sqrt{\pi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) x^2 dx &= 2^n n! \sqrt{\pi} \left(n + \frac{1}{2}\right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2} H_n^2(x) dx &= 2^{n-\frac{1}{2}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

5. Получить интегральное уравнение для квадратов полиномов Эрмита с нечетным индексом:

$$\frac{e^{-x} H_{2n+1}^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} J_1(2\sqrt{xy}) \frac{e^{-y} H_{2n+1}^2(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy.$$

Указание. Использовать для вычисления интеграла в правой части метод примера 4.

6. Разложить по полиномам Эрмита функцию $f(x) = \cos 2x$.
7. Доказать формулы:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^{-\frac{1}{2}(x+y)} (xy)^{\frac{\alpha}{2}} L_n^{\alpha}(x) L_n^{\alpha}(y)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n &= \frac{e^{-\frac{1}{2}(x+y) \frac{1+t}{1-t}} I_{\alpha}\left(\frac{2\sqrt{xyt}}{1-t}\right)}{1-t} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}}{t^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad |t| < 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n &= \frac{e^{-x \frac{1+t}{1-t}} I_{\alpha}\left(\frac{2x\sqrt{t}}{1-t}\right)}{1-t} \frac{t^{\frac{\alpha}{2}}}{t^{\frac{\alpha}{2}}}, \quad |t| < 1 \end{aligned}$$

($I_{\alpha}(z)$ — функция Бесселя мнимого аргумента), аналогичные формулам (A, B) примера 3 теории полиномов Эрмита. (E. Hill, Proc. Nat. Acad. of Sci., 12, 1926, 261—265; 265—269; 348—352).

8. Воспользовавшись результатами примера 7, получить интегральное уравнение для квадратов полиномов Лагерра

$$e^{-x} x^{\alpha} [L_n^{\alpha}(x)]^2 = \int_0^{\infty} J_{2\alpha}(2\sqrt{xy}) e^{-y} y^{\alpha} [L_n^{\alpha}(y)]^2 dy, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

частным случаем которого является уравнение примера 5. (См., например, Ватсон [2].)

9. Основываясь на равенствах (4.9,2) и (4.17,2), доказать формулу Успенского

$$L_n^{\alpha}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) (2n)!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} H_{2n}(t\sqrt{x}) dt, \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

дающую выражение полиномов Лагерра через полиномы Эрмита.

10. Получить разложение

$$e^t (tx)^{-\frac{\alpha}{2}} J_{\alpha}(2\sqrt{xt}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n^{\alpha}(x)}{\Gamma(n+\alpha+1)} t^n, \quad |t| < \infty, \quad \alpha > -1.$$

Указание. Применить общую теорию § 4.23.

11. Полиномы Чебышева $T_n(x)$ определяются формулой:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

откуда следует

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1 \quad \text{и т. д.}$$

*

Опираясь на данное определение, показать, пользуясь методами настоящей главы, что полиномы Чебышева обладают следующими свойствами:

$$(1) \quad w(x, t) = \frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) t^n, \quad |t| < 1;$$

$$(2) \quad T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$(3) \quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0;$$

$$(4) \quad \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} T_m(x) T_n(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases}$$

Полиномы Чебышева играют важную роль в теории аппроксимации функций.

12. Полиномы Якоби $G_n(p, q, x)$ могут быть определены посредством формулы

$$G_n(p, q, x) = \frac{x^{1-q}(1-x)^{q-p}}{q(q+1)\dots(q+n-1)} \times \\ \times \frac{d^n}{dx^n} \{x^{p+q-1}(1-x)^{p+n-q}\}, \quad q > 0, \quad p > q-1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

и представляют собой ортогональную систему функций на промежутке $(0, 1)$ с весом $p(x) = x^{q-1}(1-x)^{p-q}$.

Получить различные свойства этих полиномов и показать, что полиномы Лежандра $P_n(x)$ и полиномы Чебышева $T_n(x)$ суть частные случаи рассматриваемого класса полиномов. (См., например, Курант — Гильберт [1]).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ IV

- Смирнов В. И. [1], Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. [1], Курант Р. и Гильберт Д. [1], Джексон Д. [1], Уиттекер и Ватсон [1], Сеге [1].
Справочники: Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1], Магнус и Оберхеттингер [1].
Полная библиография по ортогональным полиномам приведена в работе Шохата, Хилла и Уолша [1].

ГЛАВА V ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 5.1. Введение

Цилиндрическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.1,1)$$

где z — комплексное переменное, ν — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения. Термин „цилиндрические функции“ обязан своим происхождением тому обстоятельству, что уравнение (5.1,1) встречается при рассмотрении краевых задач теории потенциала для цилиндрической области (§ 6.3).

Специальные классы цилиндрических функций известны в литературе под названием функций Бесселя и иногда это наименование присваивается всему классу цилиндрических функций.

Хорошо разработанная теория рассматриваемых функций, наличие подробных таблиц и широкая область применений служат достаточным основанием для того, чтобы отнести цилиндрические функции к числу наиболее важных специальных функций. Приложения цилиндрических функций к физике, технике и анализу носят весьма разнообразный характер — от самых абстрактных проблем теории чисел и теоретической астрономии до конкретных задач математической физики и техники. Некоторые из этих приложений, взятые преимущественно из области математической физики, приведены в гл. VI.

Настоящая глава содержит краткое изложение основ теории цилиндрических функций, более подробные сведения о которых

читатель может найти в специальных сочинениях, посвященных этим функциям, в частности в известной монографии Ватсона*) и других работах, указанных в конце главы.

§ 5.2. Функции Бесселя с целым положительным значком

Для рассмотрения многих проблем, связанных с применением цилиндрических функций, достаточно ограничиться изучением специального класса этих функций, который соответствует случаю, когда параметр ν в уравнении (5.1,1) равен нулю или целому положительному числу.

Исследование данного класса носит более элементарный характер, чем теория, относящаяся к произвольным значениям ν , и может служить хорошим введением в эту общую теорию.

Покажем, что одним из решений уравнения

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.2,1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

является функция Бесселя первого рода порядка n , $u_1 = J_n(z)$, которая для любых значений z определяется как сумма ряда

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!}, \quad |z| < \infty. \quad (5.2,2)$$

При помощи признака Даламбера легко убедиться, что рассматриваемый ряд сходится на всей плоскости комплексного переменного z , следовательно, представляет целую функцию от z .

Если обозначить левую часть уравнения (5.2,1) через $l(u)$ и ввести сокращенную запись коэффициентов ряда (5.2,2), положив

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k! (n+k)!},$$

*) Г. Н. Ватсон [1].

В последующих ссылках это сочинение обозначается буквой [В].

то в результате подстановки получим:

$$\begin{aligned} l(u_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k-2} \{(n+2k)(n+2k-1) + \\ &\quad + (n+2k) - n^2\} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4\alpha_k z^{n+2k-2} k(n+k) + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{n+2k} \{4\alpha_{k+1}(k+1)(n+k+1) + \alpha_k\}, \end{aligned}$$

откуда следует $l(u_1) \equiv 0$, так как выражение в фигурных скобках равно нулю. Таким образом, функция $J_n(z)$ удовлетворяет уравнению (5.2,1), т. е. представляет собой цилиндрическую функцию.

Простейшими функциями рассматриваемого класса являются функции Бесселя порядка нуль и единица:

$$\left. \begin{aligned} J_0(z) &= 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!^2} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!^2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{3!^2} + \dots, \\ J_1(z) &= \frac{z}{2} \left[1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{1!2!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{2!3!} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^6}{3!4!} + \dots \right]. \end{aligned} \right\} (5.2,3)$$

Покажем, что функции Бесселя других порядков могут быть выражены через эти две функции. Для доказательства предположим, что n — целое положительное число, умножим ряд (5.2,2) на z^n и продифференцируем по z . Мы получим тогда

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} z^n J_n(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{2^{n+2k} k! (n+k)!} z^{2n+2k-1} = \\ &= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n-1+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n-1+2k} = z^n J_{n-1}(z), \end{aligned}$$

или

$$\frac{d}{dz} z^n J_n(z) = z^n J_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.2,4)$$

Аналогичным образом, умножая ряд на z^{-n} , находим:

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5.2,5)$$

Выполнив дифференцирование в равенствах (5.2,4—5) и разделив на множитель $z^{\pm n}$, приходим к формулам:

$$J_n'(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z),$$

$$J_n'(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z), \quad (5.2,6)$$

откуда непосредственно следует:

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), \quad n=1, 2, \dots \quad (5.2,7)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J_n'(z), \quad n=1, 2, \dots \quad (5.2,8)$$

Полученные формулы известны под названием рекуррентных соотношений для функций Бесселя.

Первое из соотношений дает возможность выразить функцию произвольного порядка n через функции порядков нуль и единица, что существенным образом сокращает работу по составлению таблиц функций Бесселя.

Второе соотношение позволяет представить производные от функций Бесселя через функции Бесселя. Для $n=0$ это соотношение должно быть заменено формулой

$$J_0'(z) = -J_1(z), \quad (5.2,9)$$

непосредственно вытекающей из определения данных функций.

Функции Бесселя первого рода $J_n(z)$ просто связаны с коэффициентами разложения функции $w(z, t) = e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})}$ в ряд Лорана *)

$$w(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (5.2,10)$$

*) $w(z, t)$, рассматриваемая как функция t , регулярна в кольце $0 < \delta \leq t \leq A < \infty$, поэтому разложение указанного вида существует.

Коэффициенты этого разложения могут быть вычислены путем перемножения степенных рядов

$$e^{\frac{zt}{2}} = 1 + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)}{1!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2!} + \dots,$$

$$e^{-\frac{z}{2t}} = 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)}{1!} \frac{1}{t} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{2!} \frac{1}{t^2} - \dots$$

и объединения членов, содержащих одинаковые степени t . Выполнив это, получим:

$$c_n(z) = J_n(z), \quad c_n(z) = (-1)^n J_{-n}(z), \quad (5.2,11)$$

$$n=0, 1, 2, \dots \quad n=-1, -2, \dots$$

откуда следует, что рассматриваемое разложение может быть записано в виде

$$w(z, t) = e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} =$$

$$= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z) [t^n + (-1)^n t^{-n}]. \quad (5.2,12)$$

Функция $w(z, t)$ называется производящей функцией для функций Бесселя с целым значком; найденное соотношение (5.2,12) играет важную роль в теории этих функций.

Для получения общего интеграла уравнения (5.2,1), дающего выражение произвольной цилиндрической функции с целым значком $\nu = n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), необходимо построить второе решение уравнения, линейно независимое с $J_n(z)$. В качестве такого решения может быть взята функция Бесселя второго рода, $u_2 = Y_n(z)$, определение которой будет дано в § 5.4. Исходя из этого определения, нетрудно получить для $Y_n(z)$ аналитическое выражение в виде ряда (§ 5.5):

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{\psi(k+1) - \psi(k+n+1)\}, \quad (5.2,13)$$

где $\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, $\psi(1) = -\gamma$ (γ — постоянная Эйлера) и, в случае $n=0$, первую из сумм надлежит положить равной нулю.

Функция $Y_n(z)$ регулярна в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$. Существенная особенность рассматриваемого решения состоит в том, что оно обращается в бесконечность, когда $z \rightarrow 0$. Общее выражение цилиндрической функции для $\nu = n$ представляет линейную комбинацию построенных решений

$$u = Z_n(z) = AJ_n(z) + BY_n(z), \quad (5.2,14)$$

где A и B — произвольные постоянные, $n = 0, 1, 2, \dots$

§ 5.3. Функции Бесселя с произвольным значком

Функции Бесселя, рассмотренные в § 5.2, составляют частный случай цилиндрических функций более общего вида, известных под названием функций Бесселя первого рода с произвольным значком ν . Чтобы определить эти функции, рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

где z — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, ν — параметр, который может принимать любые вещественные или комплексные значения*).

Легко видеть, что данный ряд сходится при любых z и ν , причем в области $|z| < R$, $|\nu| < N$ (R, N — произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных.

Действительно, начиная с достаточного большого k , отношение модулей последующего члена ряда к предыдущему, равное на основании (1.2,1) величине

$$\frac{|z|^2}{4(k+1)|k+1+\nu|} \leq \frac{R^2}{4(k+1)(k+1-N)},$$

* Ограничение, положенное на z , необходимо для однозначности функции z^ν и может быть отброшено, если ν — целое число.

не будет превосходить некоторой правильной положительной дроби q , не зависящей от z и ν . Отсюда, согласно известному признаку сходимости, следует, что рассматриваемый ряд сходится равномерно в указанной области*).

Так как члены ряда представляют собой регулярные функции в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, сумма ряда определяет некоторую функцию комплексного переменного z , регулярную в рассматриваемой разрезанной плоскости. Эта функция называется функцией Бесселя первого рода с индексом ν и обозначается символом $J_\nu(z)$.

Таким образом,

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi. \quad (5.3,1)$$

Нетрудно показать, что определенная таким образом функция есть частное решение уравнения

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0. \quad (5.3,2)$$

Действительно, обозначая левую часть этого уравнения $l(u)$ и полагая $u_1 = J_\nu(z)$, мы находим**), так же как в § 5.2:

$$l(u_1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\nu+2k} \{4\alpha_{k+1}(k+1)(\nu+k+1) + \alpha_k\},$$

где α_k — коэффициенты ряда (5.3,1),

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

откуда, на основании (1.2,1) следует, что $l(u_1) \equiv 0$.

Так как при фиксированном z , принадлежащем плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, члены ряда (5.3,1) представляют

*) Функциональный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(z)$ сходится равномерно в области (D) , если для всякого z , принадлежащего (D) и $k \geq m$, выполняется неравенство

$$\left| \frac{u_{k+1}(z)}{u_k(z)} \right| \leq q < 1,$$

где q не зависит от z .

**) Равномерно сходящийся ряд регулярных функций можно дифференцировать почленно.

собой целые функции переменного ν (§ 1.1), то из равномерной сходимости по отношению к этому переменному вытекает, что функция Бесселя первого рода, рассматриваемая как функция своего знака, есть целая функция ν . При целом $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) $\Gamma(k + \nu + 1) = (n + k)!$ и ряд (5.3,1) переходит в ряд (5.2,2), поэтому функции, определенные в настоящем параграфе, являются обобщением функций Бесселя с целым положительным знаком, изученных в § 5.2. При ν равном целому отрицательному числу $\nu = -n$ ($n = 1, 2, \dots$), первые n членов ряда (5.3,1) обращаются в нуль (§ 1.2), и рассматриваемая формула может быть записана в виде:

$$J_{-n}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2k}}{k! (k-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2s}}{(s+n)! s!},$$

откуда следует

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.3,3)$$

Таким образом, функции Бесселя с отрицательным целым знаком отличаются от соответствующих функций с положительным знаком только постоянным множителем.

Полученное соотношение вместе с формулами (5.2,10—11) показывает, что разложение (5.2,12) может быть записано в виде

$$\omega(z, t) = e^{\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n, \quad 0 < |t| < \infty. \quad (5.3,4)$$

Многие равенства, установленные ранее для функций Бесселя с целым положительным знаком, переносятся на функции с произвольным индексом без каких-либо изменений. Так, например, имеют место соотношения:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z),$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z), \quad (5.3,5)$$

$$\frac{d}{dz} z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu} J_{\nu-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz} z^{-\nu} J_{\nu}(z) = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z), \quad (5.3,6)$$

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m z^{\nu} J_{\nu}(z) = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z),$$

$$\left(\frac{d}{z dz}\right)^m z^{-\nu} J_{\nu}(z) = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z), \quad (5.3,7)$$

представляющие собой обобщение соответствующих формул § 5.2. Доказательство формул (5.3,5—6) повторяет рассуждения этого параграфа и поэтому не приводится. Формулы (5.3,7) получаются путем повторного применения равенств (5.3,6).

§ 5.4. Общее представление цилиндрических функций. Функции Бесселя второго рода

По определению (§ 5.1), цилиндрическая функция есть произвольное решение дифференциального уравнения второго порядка (§ 5.1)

$$l(u) = u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.4,1)$$

поэтому общее ее выражение содержится в форме

$$u = Z_{\nu}(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z), \quad (5.4,2)$$

где u_1 и u_2 — какие-либо линейно независимые решения рассматриваемого уравнения, C_1 и C_2 — постоянные, являющиеся, вообще говоря, произвольными функциями параметра ν . Легко получить общее выражение цилиндрической функции для случая, когда ν отлично от целого числа. Действительно, выбрав $u_1 = J_{\nu}(z)$, где $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя, определенная в § 5.3, мы можем взять в качестве u_2 функцию $u_2 = J_{-\nu}(z)$, которая также является решением уравнения (5.4,1), так как последнее не меняется при замене ν на $-\nu$.

Если ν не равно целому числу, асимптотическое поведение рассматриваемых решений при $z \rightarrow 0$ будет

$$u_1 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)}, \quad u_2 \approx \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, \quad (5.4,3)$$

поэтому эти решения линейно независимы между собой*) и искомое выражение для цилиндрической функции может быть дано в виде

$$u = Z_{\nu}(z) = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 J_{-\nu}(z), \quad (5.4,4)$$

$$\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

*) При ν равном нулю или целому числу это рассуждение теряет силу.

Если ν — целое число, то, в силу соотношения (5.3,3), построенные частные решения линейно зависимы между собой и найденное выражение (5.4,4) не является общим интегралом уравнения Бесселя (5.4,1). Чтобы получить представление произвольной цилиндрической функции, пригодное при любых значениях параметра ν , введем в рассмотрение функцию Бесселя второго рода $Y_\nu(z)$, которую для произвольных z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, определим при помощи равенства *):

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}. \quad (5.4,5)$$

При ν равном целому числу правая часть рассматриваемого выражения приобретает неопределенный вид (5.3,3) и мы условимся понимать под значением функции в этом случае предел

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z). \quad (5.4,6)$$

Так как, по доказанному, числитель и знаменатель в (5.4,5) суть целые функции ν , рассматриваемый предел существует и может быть вычислен по правилу Лопиталю, применение которого дает:

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\left\{ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n} - (-1)^n \left\{ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n} \right]. \quad (5.4,7)$$

Из определения функции $Y_\nu(z)$ следует, что эта функция регулярна в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$, а при фиксированном z представляет собой целую функцию параметра ν . Докажем теперь, что $Y_\nu(z)$ удовлетворяет уравнению (5.4,1), следовательно, является цилиндрической функцией. При ν , отличном от целого числа, требуемый результат непосредственно вытекает из формулы (5.4,4), поэтому достаточно провести доказательство только для случая $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). С этой целью заметим предварительно, что если $l(u)$ обозначает попрежнему левую часть уравнения (5.4,1), то

$$\frac{\partial}{\partial \nu} l(u) = l\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) - \frac{2\nu}{z^2} u,$$

*) В некоторых работах, посвященных теории функций Бесселя, для обозначения этой функции используется вместо $Y_\nu(z)$ символ $N_\nu(z)$.

поэтому, если u — какое-либо решение уравнения $l(u) = 0$,

$$l\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right) = \frac{2\nu}{z^2} u.$$

Воспользовавшись этим соотношением и подставляя вместо $Y_n(z)$ правую часть равенства (5.4,7), получаем:

$$l(Y_n) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{2\nu}{z^2} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{2\nu}{z^2} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n} \equiv 0,$$

так как, на основании (5.3,3), выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

Решения $u_1 = J_\nu(z)$ и $u_2 = Y_\nu(z)$ линейно независимы между собой. Для $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ этот результат является следствием линейной независимости решений $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$. Линейная независимость для $\nu = n$ ($0, \pm 1, \pm 2, \dots$) вытекает из сопоставления поведения рассматриваемых функций при $z \rightarrow 0$ [формулы (5.4,3) и (5.5,4)]. Таким образом, общее выражение цилиндрической функции, пригодное при любых значениях ν , будет

$$u = Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 Y_\nu(z). \quad (5.4,8)$$

Функции Бесселя второго рода удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и функции первого рода, именно:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\nu-1}(z) + Y_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} Y_\nu(z), \\ Y_{\nu-1}(z) - Y_{\nu+1}(z) &= 2Y'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu Y_\nu(z) &= z^\nu Y_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} Y_\nu(z) &= -z^{-\nu} Y_{\nu+1}(z), \end{aligned} \right\} \quad (5.4,9)$$

и т. д.

При ν , отличном от целого числа, справедливость этих формул вытекает из определения функции Бесселя второго рода и соответствующих формул для функций первого рода. Для целого ν требуемый результат следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку ν , что позволяет осуществить в соотношениях (5.4,9) предельный переход $\nu \rightarrow n$.

Отметим еще формулу

$$Y_{-n}(z) = (-1)^n Y_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4,10)$$

являющуюся следствием (5.4,7) и позволяющую свести вычисление функций с отрицательным целым значком к вычислению функций, индекс которых положительных.

При помощи замены переменных в уравнении (5.4,1) легко получить ряд других дифференциальных уравнений, общий интеграл которых может быть выражен через цилиндрические функции. Наиболее интересные для приложений уравнения этого типа являются различными частными случаями дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-2\alpha}{z} u' + \left[(\beta\gamma z^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2 \gamma^2}{z^2} \right] u &= 0, \\ u'' + \alpha z^\gamma u &= 0, \end{aligned} \right\} (5.4,11)$$

общие интегралы которых соответственно будут:

$$u = z^\alpha Z_\nu(\beta z^\gamma), \quad u = z^{\frac{1}{2}} Z_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\alpha^{\frac{1}{2}}}{\gamma+1} z^{1+\frac{\gamma}{2}} \right), \quad (5.4,12)$$

где $Z_\nu(z)$ обозначает произвольную цилиндрическую функцию.

§ 5.5. Разложение в ряд функции Бесселя второго рода с целым значком

Для того чтобы получить разложение в ряд функции $Y_n(z)$, достаточно воспользоваться формулой (5.4,7) и вычислить производные по значку ν , исходя из разложения (5.3,1), причем, ввиду соотношения (5.4,10), можно ограничиться рассмотрением случая целых положительных $n=0, 1, 2, \dots$

Так как ряд (5.3,1), по доказанному, сходится равномерно по отношению к ν , мы можем дифференцировать его почленно и получим тогда *):

$$\left\{ \frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \left\{ \ln \frac{z}{2} - \psi(k+n+1) \right\},$$

* Переход к пределу при $\nu \rightarrow n$ под знаком суммы законен, так как ряд, полученный почленным дифференцированием равномерно сходящегося ряда регулярных функций, сходится равномерно.

где $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ — логарифмическая производная гамма-функции (§ 1.3).

Аналогично имеем:

$$\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu+2k}}{k! \Gamma(k-\nu+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right\}.$$

При $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ и $\nu \rightarrow n$ $\Gamma(k-\nu+1) \rightarrow \infty$, $\psi(k-\nu+1) \rightarrow \infty$, поэтому первые n членов ряда принимают неопределенный вид. Воспользовавшись известными формулами теории гамма-функции (1.2,2; 1.3,4; 1.2,4), получим для таких k :

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(k-\nu+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right\} &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\psi(k-\nu+1)}{\Gamma(k-\nu+1)} = \\ &= \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{\sin \pi(\nu-k) \Gamma(\nu-k)}{\pi} \left\{ \pi \operatorname{ctg} \pi(\nu-k) + \psi(\nu-k) \right\} = \\ &= (-1)^{n-k} (n-k-1)! \end{aligned}$$

Далее, при $k=n, n+1, \dots$ находим:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(k-\nu+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-\nu+1) \right\} &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-n+1)} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(k-n+1) \right\}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ (-1)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(n+p)! p!} \left\{ -\ln \frac{z}{2} + \psi(p+1) \right\} \left(\frac{z}{2}\right)^{2p+n}, \end{aligned}$$

где введен новый значок суммирования $p=n-k$.

Из формулы (5.4,7) следует, что искомое разложение функции Бесселя второго рода с целым положительным значком имеет вид:

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right\}, \quad (5.5,1)$$

$n=0, 1, 2, \dots, \quad |\arg z| < \pi,$

где, в случае $n=0$, первую сумму надлежит положить равной нулю.

Значение логарифмической производной гамма-функции в этой формуле может быть вычислено по формулам (1.3,6—7):

$$\psi(1) = -\gamma, \quad \psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}, \quad (5.5,2)$$

где $\gamma = 0,5772\dots$ — постоянная Эйлера, $m = 1, 2, \dots$

Принимая во внимание равенство (5.2,2), мы можем представить разложение (5.5,1) в несколько другом виде, именно:

$$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \{ \psi(k+1) + \psi(k+n+1) \}. \quad (5.5,3)$$

Из (5.5,1) вытекает, что при $z \rightarrow 0$ справедливы асимптотические формулы

$$Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{z}{2}, \quad Y_n(z) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad (5.5,4)$$

$n=1, 2, \dots$

показывающие, что $Y_n(z) \rightarrow \infty$, когда $z \rightarrow 0$.

§ 5.6. Функции Бесселя 'третьего рода

К цилиндрическим функциям относятся также функции Бесселя третьего рода или функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$, которые для произвольного ν и z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль полуоси $(-\infty, 0)$, определяются при помощи формул

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \quad (5.6,1)$$

где $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Целесообразность введения этих функций обусловлена тем, что рассматриваемые линейные комбинации из $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ обладают наиболее простыми асимптотическими разложениями при больших z (§ 5.11) и часто встречаются в приложениях.

Из определения функций Ханкеля следует, что эти функции представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и целые функции ν . Очевидно, что рассматриваемые функции линейно независимы между собой и по отношению к $J_\nu(z)$, так что общий интеграл уравнения Бесселя (5.4,1) может быть, наряду с (5.4,8), представлен в одной из следующих форм:

$$u = Z_\nu(z) = A_1 J_\nu(z) + A_2 H_\nu^{(1)}(z) = B_1 J_\nu(z) + B_2 H_\nu^{(2)}(z) = D_1 H_\nu^{(1)}(z) + D_2 H_\nu^{(2)}(z), \quad (5.6,2)$$

где A_1, \dots, D_2 — произвольные постоянные.

Являясь линейными комбинациями функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$, функции Ханкеля удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям, что и эти функции, например,

$$\left. \begin{aligned} H_{\nu-1}^{(i)}(z) + H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= \frac{2\nu}{z} H_\nu^{(i)}(z), \\ H_{\nu-1}^{(i)}(z) - H_{\nu+1}^{(i)}(z) &= 2 \frac{dH_\nu^{(i)}(z)}{dz}, \\ \frac{d}{dz} z^\nu H_\nu^{(i)}(z) &= z^\nu H_{\nu-1}^{(i)}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} H_\nu^{(i)}(z) &= -z^{-\nu} H_{\nu+1}^{(i)}(z) \end{aligned} \right\} \quad (5.6,3)$$

и т. д.

Если с помощью (5.4,5) исключить из (5.6,1) функцию Бесселя второго рода, то получим

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) &= \frac{J_{-\nu}(z) - e^{-i\nu\pi} J_{\nu}(z)}{i \sin \nu\pi}, \\ H_{\nu}^{(2)}(z) &= \frac{e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{i \sin \nu\pi}, \end{aligned} \quad (5.6,4)$$

откуда вытекают важные соотношения:

$$H_{-\nu}^{(1)}(z) = e^{i\nu\pi} H_{\nu}^{(1)}(z), \quad H_{-\nu}^{(2)}(z) = e^{-i\nu\pi} H_{\nu}^{(2)}(z). \quad (5.6,5)$$

§ 5.7. Функции Бесселя мнимого аргумента

С функциями Бесселя тесно связаны две часто встречающиеся в приложениях функции $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$, которые для z , принадлежащего плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси $(-\infty, 0)$ и произвольного ν , могут быть определены при помощи формул:

$$I_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}, \quad |z| < \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad (5.7,1)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{\nu}(z) &= \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_{\nu}(z)}{\sin \nu\pi}, \\ |\arg z| &< \pi, \quad \nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \right\} \quad (5.7,2)$$

и при целом $\nu = n$:

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_{\nu}(z), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.7,3)$$

Повторяя рассуждения § 5.3, получаем, что $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 0)$ и целые функции ν .

Рассматриваемые функции просто связаны с функциями Бесселя от аргумента $ze^{\pm \frac{i\pi}{2}}$.

Действительно, предположим, что $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Тогда $-\frac{\pi}{2} < \arg ze^{\frac{i\pi}{2}} < \pi$ и из (5.3,1) следует:

$$J_{\nu}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} I_{\nu}(z),$$

откуда

$$I_{\nu}(z) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{\nu}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right), \quad (5.7,4)$$

для всех $-\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Аналогично из формулы (5.6,4) получаем для таких же z :

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) &= \frac{J_{-\nu}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right) - e^{-i\nu\pi} J_{\nu}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right)}{i \sin \nu\pi} = \\ &= \frac{e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} I_{-\nu}(z) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} I_{\nu}(z)}{i \sin \nu\pi} = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} K_{\nu}(z), \end{aligned}$$

откуда

$$K_{\nu}(z) = \frac{\pi i}{2} e^{\frac{i\nu\pi}{2}} H_{\nu}^{(1)}\left(ze^{\frac{i\pi}{2}}\right), \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}. \quad (5.7,5)$$

Для значений $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ функции $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ могут быть выражены через функции Бесселя от аргумента $ze^{-\frac{i\pi}{2}}$. Мы имеем:

$$I_{\nu}(z) = e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_{\nu}\left(ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right), \quad K_{\nu}(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} H_{\nu}^{(2)}\left(ze^{-\frac{i\pi}{2}}\right) \quad (5.7,6)$$

для всех $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$.

На основании полученных соотношений функции $I_{\nu}(z)$ и $K_{\nu}(z)$ называются функциями Бесселя мнимого аргумента*). Функция $K_{\nu}(z)$ известна в литературе также под названием функции Макдональда.

*) Это название следует признать не слишком удачным. Более целесообразным является термин „модифицированные функции Бесселя“, принятый некоторыми авторами.

Из выведенных формул непосредственно следует, что рассматриваемые функции представляют собой линейно независимые решения дифференциального уравнения

$$u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad (5.7,7)$$

которое отличается от уравнения Бесселя только знаком одного члена и переходит в него при подстановке $z = \pm it$.

Уравнение (5.7,7) часто встречается в математической физике. Общий интеграл этого уравнения при произвольном ν может быть записан в виде

$$u = C_1 I_\nu(z) + C_2 K_\nu(z). \quad (5.7,8)$$

Функции $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) &= \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) &= -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \\ I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) &= 2I'_\nu(z), \\ K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) &= -2K'_\nu(z), \\ \frac{d}{dz} z^\nu I_\nu(z) &= z^\nu I_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} z^\nu K_\nu(z) = -z^\nu K_{\nu-1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} I_\nu(z) &= z^{-\nu} I_{\nu+1}(z), \\ \frac{d}{dz} z^{-\nu} K_\nu(z) &= -z^{-\nu} K_{\nu+1}(z) \end{aligned} \right\} (5.7,9)$$

и т. д.

Формулы первой группы доказываются подстановкой ряда (5.7,1), причем сначала проверяются две последние формулы, а затем из них выводятся остальные. Формулы второй группы для ν , отличного от целого числа, проверяются путем подстановки в них выражения (5.7,2) и использования формул первой группы. Справедливость найденных соотношений при целом ν следует из непрерывности рассматриваемых функций по отношению к значку.

Укажем еще на две полезные формулы:

$$\begin{aligned} I_{-n}(z) &= I_n(z), \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots; \\ K_{-\nu}(z) &= K_\nu(z), \end{aligned} \quad (5.7,10)$$

первая из которых вытекает из (5.7,1), если принять во внимание, что при $\nu = -n$ первые n членов разложения обращаются в нуль, в то время как вторая является прямым следствием определения функции Макдональда (5.7,2).

Разложение функции $K_n(z)$ при $n=0, 1, 2, \dots$ может быть получено из (5.7,3) методом § 5.5. Приведем окончательный результат вычисления:

$$\left. \begin{aligned} K_n(z) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} + \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}}{k! (k+n)!} \left\{ 2 \ln \frac{z}{2} - \psi(k+1) - \right. \\ &\quad \left. - \psi(k+n+1) \right\}, \end{aligned} \right\} (5.7,11)$$

$$n=0, 1, 2, \dots \quad |\arg z| < \pi.$$

Здесь $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, значения которой могут быть найдены по формулам (5.5,2). Для случая $n=0$ первую из сумм надлежит считать равной нулю.

Из (5.7,11) вытекает, что асимптотическое поведение функции $K_n(z)$ при $z \rightarrow 0$ определяется формулами

$$K_0(z) \approx \ln \frac{2}{z}; \quad K_n(z) \approx \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5.7,12)$$

поэтому $K_n(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow 0$.

§ 5.8. Цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Специальный класс цилиндрических функций образуют цилиндрические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа. Этот класс встречается в приложениях и замечателен тем, что в рассматриваемом случае цилиндрические функции могут быть выражены через элементарные функции. Чтобы показать это, найдем предварительно значения функций $J_{\pm \frac{1}{2}}(z)$, для чего положим в (5.3,1)

$\nu = \pm \frac{1}{2}$ и воспользуемся для преобразования рядов формулой удвоения гамма-функции (1.2,3).

Мы получим тогда

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma\left(k+\frac{3}{2}\right)} = \left. \begin{aligned} &= \left(\frac{2z}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{\Gamma(2k+2)} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z \end{aligned} \right\} (5.8,1)$$

и, аналогично,

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z. \quad (5.8,2)$$

Возможность выразить функцию Бесселя первого рода с любым полуцелым значком через элементарные функции следует теперь из рекуррентной формулы (5.3,5)

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z),$$

пользуясь которой можно последовательно получить:

$$J_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{z} J_{\frac{1}{2}}(z) - J_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\sin z}{z} - \cos z \right],$$

$$J_{-\frac{3}{2}}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sin z + \frac{\cos z}{z} \right]$$

и т. д.

Общее выражение для $J_{n+\frac{1}{2}}(z)$ через элементарные функции получается из формул (5.3,7). Например, если положить во второй из них $\nu = \frac{1}{2}$ и воспользоваться результатом (5.8,1), то находим:

$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} z^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{z dz}\right)^n \frac{\sin z}{z}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (5.8,3)$$

Соответствующие формулы для функций Бесселя второго и третьего рода могут быть выведены из найденных соотношений, если воспользоваться выражениями этих функций через функции Бесселя первого рода (5.4,5 и 5.6,4). Например, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y_{\frac{1}{2}}(z) &= -J_{-\frac{1}{2}}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z, \\ H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{i}, \quad H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-iz}}{-i} \end{aligned} \right\} (5.8,4)$$

и т. д.

В заключение укажем на формулы:

$$\left. \begin{aligned} I_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-\frac{1}{2}}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{ch} z, \\ K_{\frac{1}{2}}(z) &= \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-z}, \end{aligned} \right\} (5.8,5)$$

вытекающие из определений рассматриваемых функций (5.7,1—2).

Формулы для других полуцелых значений индекса получаются из этих формул с помощью рекуррентных соотношений (5.7,9). Лиувиллем доказано, что случай полуцелого индекса является единственным, когда цилиндрические функции приводятся к элементарным.

§ 5.9. Вронскиан системы решений уравнения Бесселя

Вронскианом системы решений (u_1, u_2) линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка называется определитель

$$W\{u_1(z), u_2(z)\} = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix},$$

где штрих обозначает производную по независимому переменному z . Необходимое и достаточное условие линейной независимости решений u_1 и u_2 заключается в требовании, чтобы вронскиан не был тождественно равен нулю.

Мы вычислим вронскиан различных пар решений уравнения Бесселя

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0$$

и получим тем самым ряд полезных в приложениях формул, из которых, в частности, следуют найденные ранее другим способом результаты, относящиеся к вопросу о линейной зависимости построенных решений.

Для вычисления вронскиана запишем уравнения для u_1 и u_2 в виде

$$\frac{d}{dz} z u_1' + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) u_1 = 0, \quad \frac{d}{dz} z u_2' + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) u_2 = 0,$$

умножим первое из этих уравнений на u_2 , второе — на u_1 и вычтем одно из другого. Мы получим тогда

$$\frac{d}{dz} z W \{u_1(z), u_2(z)\} = 0,$$

откуда следует

$$W \{u_1(z), u_2(z)\} = \frac{C}{z},$$

где C — не зависящая от z постоянная, значение которой может быть определено, например, из соотношения

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} z W \{u_1(z), u_2(z)\}.$$

В частности, выбирая $u_1 = J_\nu(z)$, $u_2 = J_{-\nu}(z)$, где ν отлично от целого числа, и воспользовавшись разложением (5.3,1) и формулами (1.2,1 — 2) теории гамма-функции, находим:

$$C = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^{-2\nu}}{\Gamma(1+\nu)\Gamma(1-\nu)} [1 + O(z^2)] = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi},$$

отсюда следует:

$$W \{J_\nu(z), J_{-\nu}(z)\} = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}. \quad (5.9,1)$$

Справедливость найденной формулы при целом ν вытекает из принципа непрерывности, причем в этом случае, как и должно быть, $W \equiv 0$.

Вронскиан других пар решений уравнения Бесселя может быть получен таким же образом или выведен из (5.9,1) и соотношений (5.4,5; 5.6,4). При этом мы всегда предполагаем сперва ν отличным от целого числа, а затем распространяем найденную формулу на любые значения ν , пользуясь принципом непрерывности.

Поступая таким образом, находим:

$$W \{J_\nu(z), Y_\nu(z)\} = -\frac{1}{\sin \nu\pi} W \{J_\nu(z), \quad (5.9,2)$$

$$J_{-\nu}(z)\} = \frac{2}{\pi z},$$

$$W \{H_\nu^{(1)}(z), H_\nu^{(2)}(z)\} = \frac{2i}{\sin \nu\pi} W \{J_\nu(z), \quad (5.9,3)$$

$$J_{-\nu}(z)\} = -\frac{4i}{\pi z}$$

и т. д.

В заключение укажем на аналогичную формулу для функций Бесселя мнимого аргумента:

$$W \{I_\nu(z), K_\nu(z)\} = -\frac{1}{z}. \quad (5.9,4)$$

§ 5.10. Интегральные представления для цилиндрических функций

Цилиндрические функции допускают простые интегральные представления с помощью определенных или контурных интегралов, содержащих переменное z как параметр. Из этих формул наибольшей общностью обладают интегральные представления, даваемые контурными интегралами, которые обычно справедливы в более широкой области изменения аргумента z и индекса ν , чем представления в виде определенных интегралов. Последние, однако, наиболее часто встречаются в приложениях, в связи с чем мы ограничимся рассмотрением преимущественно формул этого типа, отсылая читателя по поводу других интегральных представлений к специальным монографиям по теории функций Бесселя *).

Одно из наиболее простых интегральных представлений для функций Бесселя принадлежит Пуассону. Это представление можно получить суммированием ряда (5.3,1), если

*) См., например, [B], гл. VI.

воспользоваться вытекающим из (1.5,6) равенством

$$\frac{1}{\Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt,$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad (5.10,1)$$

и после подстановки изменить порядок суммирования и интегрирования. Мы получим тогда, что при $R(\nu) > -\frac{1}{2}$

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 t^{2k} (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (zt)^{2k}}{2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \times$$

$$\times \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt,$$

так как, на основании формулы удвоения гамма-функции (1.2,3),

$$2^{2k} \Gamma(k+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2k+1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2k!$$

Для строгого обоснования полученного результата заметим, что интеграл

$$F(z) = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt \quad (5.10,2)$$

сходится при $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ равномерно относительно z в круге

$|z| \leq R$ любого радиуса R и, следовательно, представляет собой четную целую функцию, которая разлагается в ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(2k)}(0)}{(2k)!} z^{2k}.$$

Интегралы, получающиеся из (5.10,2) дифференцированием по параметру z под знаком интеграла, также сходятся равномерно и выражают производные соответствующего порядка от $F(z)$. Мы имеем поэтому:

$$F^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} t^{2k} dt =$$

$$= (-1)^k \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+\nu+1)},$$

откуда:

$$\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} F(z) =$$

$$= \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k!} \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+\nu+1)} z^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} = J_\nu(z),$$

что совпадает с найденным выше результатом формальных вычислений.

Таким образом, при $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ имеет место интегральное представление:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt,$$

$$|\arg z| < \pi. \quad (5.10,3)$$

При подстановке $t = \cos \theta$ формула (5.10,3) принимает вид:

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta d\theta. \quad (5.10,4)$$

Чтобы получить другое важное интегральное представление для функций Бесселя, принадлежащее Сонину, рассмотрим интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C t^{-\nu-1} e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} dt, \quad R(z) > 0, \quad (5.10,5)$$

взятый по контуру C , изображенному на рис. 13.

Легко видеть, что при условии $R(z) \geq \delta > 0$ интегралы, взятые по бесконечным участкам пути интегрирования, сходятся равномерно, поэтому, согласно замечанию на стр. 12, $F(z)$ представляет собой регулярную функцию в рассматриваемой области.

Предположим временно, что z есть вещественное положительное число, $z \geq \delta$, и введем в (5.10,5) новое переменное интегрирования u , положив $u = \frac{zt}{2}$.

Мы получим тогда

$$F(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} u^{-\nu-1} e^{-u - \frac{z^2}{4u}} du, \quad (5.10,6)$$

где контур C' подобен контуру C .

Заменяя в (5.10,6) показательную функцию $e^{-\frac{z^2}{4u}}$ ее разложением в степенной ряд

$$e^{-\frac{z^2}{4u}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} u^{-k}$$

и интегрируя почленно, находим *):

$$F(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k!} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{ku - (k+\nu+1)u} du.$$

Внутренний интеграл может быть выражен через гамма-функцию.

Воспользовавшись результатом примера 7 упражнений к гл. I, имеем:

$$F(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \equiv J_\nu(z).$$

Согласно принципу аналитического продолжения, полученное соотношение справедливо во всей области $R(z) > 0$, т. е.

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} t^{-\nu-1} dt, \quad R(z) > 0. \quad (5.10,7)$$

Если, положив $t = \rho e^{i\theta}$, представить правую часть равенства в виде суммы интегралов, взятых по дуге окружности и прямолинейным отрезкам, то в результате простых вычислений получим:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu \theta) d\theta - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_1^\infty e^{\frac{z}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} \rho^{-\nu-1} d\rho,$$

или, после подстановки $\rho = e^\alpha$:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu \theta) d\theta - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha - \nu \alpha} d\alpha, \quad (5.10,8)$$

$$R(z) > 0, \quad \nu - \text{любое.}$$

*) Законность изменения порядка интегрирования и суммирования обосновывается так же, как выше.

В случае $\nu = n$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) второе слагаемое исчезает и формула (5.10,8) принимает более простой вид.

Интегральные представления для функций Бесселя второго и третьего рода могут быть во многих случаях выведены из соответствующих интегральных представлений для функций первого рода, если воспользоваться соотношениями (5.4,5) и (5.6,4).

Так, например, считая $R(z) > 0$ и ν отличным от целого числа, получаем, на основании формул (5.4,5) и (5.10,8):

$$Y_\nu(z) = \frac{\operatorname{ctg} \nu\pi}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \frac{\cos \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha} d\alpha - \\ - \frac{\operatorname{cosec} \nu\pi}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta + \nu\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha + \nu\alpha} d\alpha.$$

Если заменить в третьем интеграле θ на $(\pi - \theta)$, то после элементарных вычислений находим при $R(z) > 0$:

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \\ - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha} (e^{\nu\alpha} + e^{-\nu\alpha} \cos \nu\pi) d\alpha. \quad (5.10,9)$$

Формула (5.10,9) доказана в предположении, что ν отлично от целого числа, однако, так как обе стороны равенства представляют целые функции ν , из принципа аналитического продолжения следует, что она остается справедливой при любых ν .

Интегральные представления для функций Ханкеля могут быть получены из найденных формул (5.10,8—9) и соотношений (5.6,1). Мы имеем, например, для $R(z) > 0$:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{i(z \sin \theta - \nu\theta)} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{sh} \alpha} [e^{\nu\alpha} + e^{-\nu(\alpha + \pi i)}] d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 e^{z \operatorname{sh} \alpha - \nu\alpha} d\alpha + \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{\theta=0}^\pi e^{z \operatorname{sh} i\theta - \nu i\theta} d(i\theta) + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha=0}^\infty e^{z \operatorname{sh}(\alpha + \pi i) - \nu(\alpha + \pi i)} d(\alpha + \pi i)$$

или, если положить $t = \alpha + i\theta$,

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{C_1} e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt, \quad R(z) > 0, \quad (5.10,10)$$

где интегрирование производится по контуру C_1 (рис. 14).

Аналогичным образом получается формула

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{C_2} e^{z \operatorname{sh} t - \nu t} dt, \quad (5.10,11)$$

отличающаяся от первой лишь другим выбором пути интегрирования (рис. 14).

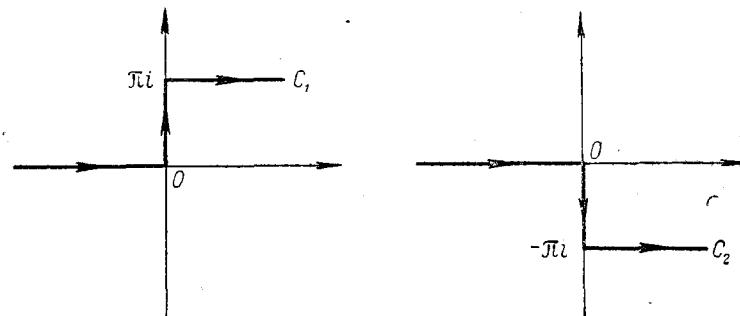


Рис. 14.

Если положить в (5.10,10—11) соответственно $t = u \pm \frac{\pi i}{2}$, эти формулы принимают вид:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{D_1} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad R(z) > 0, \quad (5.10,12)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{D_2} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad R(z) > 0, \quad (5.10,13)$$

где путь интегрирования для каждого из интегралов изображен на рис. 15.

Для дальнейшего преобразования полученных формул предположим временно, что $z > 0$, и ограничим область

изменения параметра ν полосой $-1 < R(\nu) < 1$. В этом случае интеграл по левому участку ломаной (до точки $u=0$) можно заменить, по теореме Коши, интегралом по отрицательной

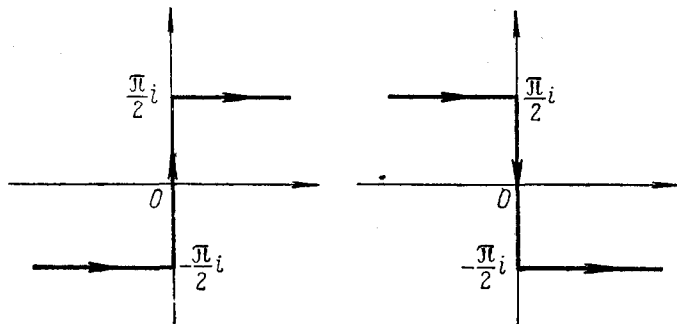


Рис. 15.

вещественной полуоси, а интеграл по правому участку ломаной — интегралом по положительной вещественной полуоси*), и формулы (5.10,12—13) переходят в следующие:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad (5.10,14)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad (5.10,15)$$

где $z > 0$, $-1 < R(\nu) < 1$.

Равенства (5.10,14—15) доказаны для положительных z , однако по принципу аналитического продолжения первая из этих формул сохраняет силу в области $0 \leq \arg z < \pi$, вторая — в области $-\pi < \arg z \leq 0$, так как в этих областях левая и правая части рассматриваемых равенств остаются регулярными функциями переменного z (за вычетом точки $z=0$). Далее, если $I(z) > 0$ в (5.10,14) или $I(z) < 0$

*) Легко видеть, что интегралы по вертикальным замыкающим отрезкам стремятся к нулю, если неограниченно отодвигать эти отрезки право и влево от мнимой оси.

в (5.10,15), условие $-1 < R(\nu) < 1$ может быть отброшено.

Таким образом, имеют место следующие интегральные представления:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad I(z) > 0, \quad (5.10,16)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = -\frac{e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iz \operatorname{ch} u - \nu u} du, \quad I(z) < 0, \quad (5.10,17)$$

ν — любое.

Формулы (5.10,16—17) дают основные интегральные представления для функций Ханкеля. Другие интегральные представления этих функций, полезные в различных приложениях, могут быть выведены из них надлежащим преобразованием определенных интегралов, входящих в рассматриваемые формулы. Возьмем в качестве примера первую из этих формул, предположим, что $R(\nu) > -\frac{1}{2}$, и временно примем $\arg z = \frac{\pi}{2}$, так что $(-iz)$ будет положительным. Принимая во внимание равенство (1.5,1), имеем:

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-xy} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad (5.10,18)$$

откуда, полагая в (5.10,16) $e^u = y$, находим:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i} \int_0^{\infty} e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\nu-1} dy = \\ &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{\frac{iz}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)} y^{-\frac{1}{2}} dy \int_0^{\infty} e^{-xy} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{\pi i \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} x^{\nu-\frac{1}{2}} dx \int_0^{\infty} e^{-y\left(x-\frac{iz}{2}\right)+\frac{iz}{2y}} y^{-\frac{1}{2}} dy, \end{aligned}$$

причем законность изменения порядка интегрирования следует из легко доказываемой абсолютной сходимости двойного интеграла.

Внутренний интеграл вычисляется с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} e^{-av^2 - \frac{b}{v^2}} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}}, \quad a > 0, b > 0, \quad (5.10,19)$$

откуда вытекает

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu - \frac{1}{2}}}{\sqrt{x + \left(\frac{-iz}{2}\right)}} \times \\ \times e^{-2\sqrt{\frac{-iz}{2}} \cdot \sqrt{x + \left(\frac{-iz}{2}\right)}} dx,$$

или, если ввести новое переменное интегрирования

$$t = \frac{\sqrt{x + \left(\frac{-iz}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{-iz}{2}}},$$

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \frac{2e^{-\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{-iz}{2}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} e^{izt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (5.10,20)$$

По теории аналитического продолжения эта формула, доказанная в предположении, что $(-iz) > 0$, остается справедливой для любых комплексных z , принадлежащих сектору $0 < \arg z < \pi$.

Аналогично для второй функции Ханкеля имеем формулу:

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = -\frac{2e^{\frac{\nu\pi i}{2}}}{i\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{iz}{2}\right)^{\nu} \int_1^{\infty} e^{-izt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -\pi < \arg z < 0. \quad (5.10,21)$$

Если, продолжая считать $(-iz) > 0$, положить в интеграле (5.10, 20) $t - 1 = \frac{s}{(-iz)}$, то после простых вычислений получим:

$$H_{\nu}^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{-\pi iz}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{s}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds, \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}. \quad (5.10,22)$$

Эта формула сохраняет свое значение при комплексных z , удовлетворяющих условию $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$, так как для таких z обе части рассматриваемого равенства остаются регулярными функциями z^* (за исключением точки $z = 0$).

Таким же образом из (5.10,21) получается формула

$$H_{\nu}^{(2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi iz}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2iz}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} ds, \quad (5.10,23) \\ R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad -\pi < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Интегральные представления (5.10,22—23) играют важную роль в выводе асимптотических выражений для цилиндрических функций при $|z| \rightarrow \infty$ (§ 5.11).

Интегральные представления для функций Бесселя мнимого аргумента могут быть получены непосредственно путем небольшого видоизменения рассуждений настоящего параграфа или выведены из соответствующих интегральных представлений для функций Бесселя и Ханкеля с помощью соотношений (5.7, 4—6).

* Особой линией интеграла является совокупность значений, для которых $2iz = s$ ($s \geq 0$), т. е. линия $\arg z = -\frac{\pi}{2}$.

Поступая таким образом, мы получим из (5.10,3) формулу

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \operatorname{ch} zt dt, \quad (5.10,24)$$

$$|\arg z| < \pi, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2},$$

из (5.10,16, 20, 22—23) — формулы:

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} u - \nu u} du = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} \nu u du, \quad (5.10,25)$$

$$R(z) > 0, \quad \nu - \text{любое};$$

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^{\infty} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt, \quad (5.10,26)$$

$$R(z) > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2};$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-z}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{s}{2z}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \quad (5.10,27)$$

$$|\arg z| < \pi, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}.$$

Отметим еще интегральное представление

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{\infty} e^{-t - \frac{z^2}{4t}} t^{-\nu-1} dt, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{4}, \quad (5.10,28)$$

которое получается из (5.10,25) заменой переменной интегрирования и оказывается полезным во многих приложениях.

Некоторые другие интегральные представления для цилиндрических функций и их произведений, полезные в приложениях, указаны в упражнениях к данной главе (примеры 1—6).

§ 5.11. Асимптотические представления цилиндрических функций для больших значений аргумента

Цилиндрические функции обладают простыми асимптотическими представлениями, удобными для аппроксимации этих функций при больших по модулю значениях z и фиксированном значении индекса ν^*). Главные члены этих формул можно получить методами гл. IV (§ 4.6, 4.14 и 4.22), исходя из дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют рассматриваемые функции, однако для вывода более точных выражений удобнее воспользоваться интегральными представлениями, найденными в § 5.10.

Из функций Бесселя наиболее простые асимптотические представления имеют функции третьего рода. Чтобы получить асимптотическое представление функции $H_\nu^{(1)}(z)$ для больших $|z|$ в секторе $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, воспользуемся равенством (5.10,22)

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \times \\ \times \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} ds, \quad (5.11,1)$$

$$R(\nu) > -\frac{1}{2},$$

и заменим множитель $\left(1 - \frac{s}{2iz}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}$ его разложением по

*) Асимптотические представления для цилиндрических функций при больших по модулю ν и фиксированном z могут быть получены сравнительно просто из формул (5.3,1), (5.4,5), (5.6,4), (5.7,1) и (5.7,2), если воспользоваться формулой Стирлинга для гамма-функции (1.4,22). Вопрос об аппроксимации цилиндрических функций при одновременном возрастании модулей z и ν принадлежит к числу труднейших вопросов теории этих функций. Основные результаты, полученные в этой области, изложены в монографии Ватсона [В].

Новые формулы этого типа предложены недавно В. А. Фоком ([В], стр. 717) и Лангером [1], [2].

биномиальной формуле с остаточным членом*). Мы имеем тогда:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \times \\ \times \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right) (2iz)^k} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu+k-\frac{1}{2}} ds + r_{n,\nu}(z) \right] = \\ = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma\left(\nu + k + \frac{1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right) (2iz)^k} + r_{n,\nu}(z) \right],$$

где

$$r_{n,\nu}(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{n! \Gamma\left(\nu - n - \frac{1}{2}\right) (2iz)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-s} s^{\nu+n+\frac{1}{2}} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n \left(1 - \frac{st}{2iz}\right)^{\nu-n-\frac{3}{2}} dt.$$

При тех ограничениях, которые наложены на $\arg z$, комплексное число $Z = -\frac{st}{2iz}$ принадлежит соответственно области

*) Эта формула имеет вид:

$$(1+\zeta)^\mu = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(1+\mu)}{k! \Gamma(1+\mu-k)} \zeta^k + \\ + \frac{\Gamma(1+\mu)}{n! \Gamma(\mu-n)} \zeta^{n+1} \int_0^1 (1-t)^n (1+\zeta t)^{\mu-n-1} dt,$$

где $|\arg(1+\zeta)| < \pi$, μ — любое.

Доказательство следует из тождества

$$(1+\zeta)^\mu = 1 + \mu \zeta \int_0^1 (1+\zeta t)^{\mu-1} dt,$$

если применить многократное интегрирование по частям.

$\delta \leq \arg Z \leq \arg Z \leq \pi - \delta \leq \pi - \delta$ и, как легко усмотреть из геометрических соображений, выполняются неравенства $|1+Z| \geq \sin \delta$, $|\arg(1+Z)| < \pi$. Поэтому, если выбрать n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $R(\nu) - n - \frac{3}{2} \leq 0$,

то получим *) $\left| \left(1 - \frac{st}{2iz}\right)^{\nu-n-\frac{3}{2}} \right| \leq e^{\pi |I(\nu)| (\sin \delta)^{R(\nu)-n-\frac{3}{2}}}$,

откуда для модуля остаточного члена вытекает оценка

$$|r_{n,\nu}(z)| \leq \frac{\Gamma\left\{R(\nu) + n + \frac{3}{2}\right\} e^{\pi |I(\nu)| (\sin \delta)^{R(\nu)-n-\frac{3}{2}}}}{(n+1)! \left|\Gamma\left(\nu - n - \frac{1}{2}\right)\right| (2|z|)^{n+1}} = O(z^{-n-1}),$$

равномерная относительно z в пределах рассматриваемого сектора.

Таким образом, имеет место следующее асимптотическое представление функции Ханкеля для больших $|z|$:

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, k)}{(2iz)^k} + O(z^{-n-1}) \right], \\ |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}, \quad (5.11,2)$$

где положено:

$$(\nu, k) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} + k\right)}{k! \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2} - k\right)} = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots [4\nu^2 - (2k-1)^2]}{2^{2k} k!}, \quad (5.11,3)$$

$$(\nu, 0) = 1.$$

Формула (5.11,2) доказана в предположении, что n выбрано так, чтобы $R(\nu) - n - \frac{3}{2} \leq 0$, однако легко видеть, что это ограничение не является существенным, и найденный результат остается справедливым для любых n . Действительно, предположим, что $R(\nu) - n - \frac{3}{2} > 0$, и выберем

*) Если a и b — комплексные числа, то $|a^b| = |a|^{R(b)} \cdot e^{-I(b) \arg a}$.

такое число $m > n$, чтобы $R(\nu) - m - \frac{3}{2} \leq 0$. Тогда, по предыдущему, мы можем представить $H_\nu^{(1)}(z)$ формулой вида (5.11,2), где n заменено на m . Но при $m > n$

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=0}^m \dots + O(z^{-m-1}) \right] &= \left[\sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k=n+1}^m \dots + O(z^{-m-1}) \right] = \\ &= \left[\sum_{k=0}^n \dots + O(z^{-n-1}) \right], \end{aligned}$$

и мы снова приходим к формуле (5.11,2).

Асимптотическое представление функции $H_\nu^{(2)}(z)$ для больших $|z|$ может быть получено совершенно аналогичным образом, если исходить из интегрального представления (5.10,23). Мы находим:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2iz)^k} + O(z^{-n-1}) \right], \\ |\arg z| &\leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5.11,4)$$

Докажем, что в формулах (5.11, 2—4) условие $R(\nu) > -\frac{1}{2}$ можно отбросить. В самом деле, если $R(\nu) \leq -\frac{1}{2}$, то, воспользовавшись соотношениями (5.6,5)

$$H_\nu^{(1)}(z) = e^{-\nu\pi i} H_{-\nu}^{(1)}(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = e^{\nu\pi i} H_{-\nu}^{(2)}(z),$$

мы получим в правой части каждого из равенств функции Ханкеля с индексом, вещественная часть которого больше чем $\left(-\frac{1}{2}\right)$. Применяя выведенные формулы и замечая, что $(-\nu, k) = (\nu, k)$, убеждаемся в справедливости асимптотических представлений (5.11,2—4) для любых значений параметра ν .

Используя вместо (5.10,22—23) интегральные представления более общего вида, можно показать, что полученные асимптотические представления остаются верными в более

широком секторе $|\arg z| \leq \pi - \delta^*$. Таким образом, имеем окончательно:

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, k)}{(2iz)^k} + O(z^{-n-1}) \right], \end{aligned} \quad (5.11,5)$$

$$\begin{aligned} H_\nu^{(2)}(z) &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-i \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)} \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2iz)^k} + O(z^{-n-1}) \right] \end{aligned} \quad (5.11,6)$$

для $|\arg z| \leq \pi - \delta$ и любых ν .

Асимптотические представления функций Бесселя первого и второго рода для больших $|z|$ получаются из этих формул, если воспользоваться соотношениями (5.6,1), откуда следует:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} + \right. \\ &+ \left. O(z^{-2n-2}) \right] - \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} + \right. \\ &\left. + O(z^{-2n-3}) \right], \end{aligned} \quad (5.11,7)$$

$$\begin{aligned} Y_\nu(z) &= \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}} + \right. \\ &+ \left. O(z^{-2n-3}) \right] + \left(\frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, 2k)}{(2z)^{2k}} + \right. \\ &\left. + O(z^{-2n-2}) \right], \end{aligned} \quad (5.11,8)$$

$|\arg z| \leq \pi - \delta, \nu - \text{любое.}$

*) [B], гл. VII.

Асимптотические представления для цилиндрических функций мнимого аргумента могут быть выведены аналогичным образом из соответствующих интегральных представлений для этих функций. Поступая таким образом, находим:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-2n-2}) \right] + \frac{e^{-z \pm \pi i (\nu + \frac{1}{2})}}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (5.11,9)$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-z} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (5.11,10)$$

где $|\arg z| \leq \pi - \delta$, ν — любое и знак (\pm) в (5.11,9) берется в зависимости от того, будет $I(z) \geq 0$.

При условии, что $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, второе слагаемое в (5.11,9) будет малой величиной более высокого порядка, чем $O(z^{-2n-2})$, поэтому эта формула может быть записана в виде:

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{(2\pi z)^{\frac{1}{2}}} \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\nu, k)}{(2z)^k} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (5.11,11)$$

$|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, ν — любое.

Из (5.11,5—11) следует, что расходящиеся ряды, получающиеся, если формально положить $n = \infty$, являются асимптотическими для функций, стоящих в левых частях рассматриваемых равенств (§ 1.4).

Способ, при помощи которого выведены рассматриваемые формулы, дает только порядок величины остаточного члена, но не позволяет сделать более точных заключений. При специальных предположениях относительно z и ν можно, путем некоторого видоизменения рассуждений, получить значительно более точные результаты. Так, например, можно показать, что если z и ν — вещественные положительные числа и число n взято настолько большим, что

$2n \geq \nu - \frac{7}{2}$, то остатки асимптотических разложений для $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ будут численно меньше первых отбрасываемых членов. В асимптотическом представлении для $K_\nu(z)$ тот же результат имеет место при $n \geq \nu - \frac{3}{2}$ *).

§ 5.12. Теоремы сложения для цилиндрических функций

Пусть r_1, r_2, R — стороны произвольного треугольника, θ и ψ — его углы, лежащие против сторон R и r_1 (рис. 16), так что

$$R = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta}, \quad \sin \psi = \frac{r_1}{R} \sin \theta.$$

Теоремами сложения в теории цилиндрических функций называются формулы вида

$$Z_\nu(\lambda R) = f_\nu(r_1, r_2, \theta) \sum_{(m)} \varphi_\nu^{(m)}(\lambda r_1) \psi_\nu^{(m)}(\lambda r_2) \chi_\nu^{(m)}(\theta) \quad (5.12,1)$$

(λ — произвольное комплексное число, $|\arg \lambda| < \pi$ **), дающие разложение цилиндрической функции $Z_\nu(\lambda R)$ в ряд, члены которого представляются собой произведение некоторой, не зависящей от индекса суммирования m , функции $f_\nu(r_1, r_2, \theta)$ на множители, зависящие каждый только от одного из переменных (r_1, r_2, θ) .

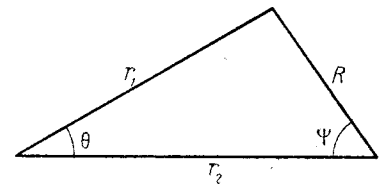


Рис. 16.

Формулы рассматриваемого типа играют важную роль в математической физике и других приложениях цилиндрических функций. Простейшей среди них является теорема сложения для функции Бесселя первого рода с индексом нуль:

$$J_0(\lambda R) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) e^{im\theta} = J_0(\lambda r_1) J_0(\lambda r_2) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) \cos m\theta. \quad (5.12,2)$$

* [B], гл. VII.

** Для целого ν это ограничение отпадает.

Доказательство этой формулы может быть дано следующим образом. Представим левую часть равенства с помощью формулы *)

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{z}{2}(t - \frac{1}{t})} t^{-n-1} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где C — произвольный замкнутый контур, охватывающий точку $t=0$, и введем новое переменное интегрирования u , положив:

$$t = \frac{r_1 e^{i\theta} - r_2}{R} u.$$

Принимая во внимание, что $R^2 = (r_1 e^{i\theta} - r_2)(r_1 e^{-i\theta} - r_2)$, имеем:

$$J_0(\lambda R) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\lambda r_1}{2}(ue^{i\theta} - \frac{1}{ue^{i\theta}})} - \frac{\lambda r_2}{2}(u - \frac{1}{u}) du,$$

где интегрирование производится по контуру C' , подобному контуру C . Далее, на основании (5.3,4)

$$e^{\frac{\lambda r_1}{2}(ue^{i\theta} - \frac{1}{ue^{i\theta}})} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) e^{im\theta} u^m,$$

причем сходимость ряда на контуре C' равномерна относительно u .

Подставляя это разложение и интегрируя почленно, находим:

$$\begin{aligned} J_0(\lambda R) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) e^{im\theta} \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} e^{-\frac{\lambda r_2}{2}(u - \frac{1}{u})} u^{m-1} du = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_{-m}(-\lambda r_2) e^{im\theta} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\lambda r_1) J_m(\lambda r_2) e^{im\theta}, \end{aligned}$$

откуда следует справедливость равенства (5.12,2).

*) Для доказательства этой формулы, представляющей специальный случай формулы (5.10,7), достаточно вычислить контурный интеграл, равный вычету подинтегральной функции в точке $t=0$.

Формула (5.12,2) допускает два обобщения на случай функций Бесселя с произвольным индексом ν . Первое из этих обобщений имеет вид:

$$J_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu\psi}{\sin \nu\psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu+m}(\lambda r_2) J_m(\lambda r_1) \frac{\cos m\theta}{\sin m\theta}, \quad (5.12,3)$$

где значение ψ указано на рис. 16, и, в случае, если ν не является целым числом, предполагается, что $r_2 > r_1$ *). Второе из рассматриваемых обобщений дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{J_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} &= 2^\nu \Gamma(\nu) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{J_{\nu+m}(\lambda r_1) J_{\nu+m}(\lambda r_2)}{(\lambda r_1)^\nu (\lambda r_2)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12,4) \end{aligned}$$

(r_1 и r_2 — любые),

где $C_m^\nu(x)$, $m=0, 1, 2, \dots$, — полиномы Гегенбауэра, которые могут быть определены как коэффициенты разложения функции

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\nu(x) t^n, \quad (5.12,5)$$

представляющей собой производящую функцию для этих полиномов.

Явные выражения для рассматриваемых полиномов будут:

$$\left. \begin{aligned} C_m^\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} (-1)^k 2^{m-2k} \frac{\Gamma(\nu+m-k)}{\Gamma(\nu) k! (m-2k)!} x^{m-2k}, \\ C_0^\nu(x) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5.12,6)$$

При $\nu = \frac{1}{2}$ разложение (5.12,5) переходит в формулу (4.2,3) и полиномы Гегенбауэра совпадают с полиномами Лежандра:

$$C_m^{\frac{1}{2}}(x) = P_m(x). \quad (5.12,7)$$

*) Для целого $\nu = n$ это ограничение не существует и r_1 и r_2 могут быть переставлены местами.

При $\nu=0$ $C_m^\nu(x) \equiv 0$, $m=1, 2, \dots$, однако произведение $\Gamma(\nu) C_m^\nu(x)$ стремится к конечному пределу, именно:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \Gamma(\nu) (\nu + m) C_m^\nu(x) = 2 \cos(m \arccos x),$$

$$m=1, 2, \dots \quad (5.12,8)$$

Обе теоремы сложения (5.12,3) и (5.12,4) доказываются аналогично формуле (5.12,2), если исходить из соответствующих интегральных представлений для функций Бесселя*). В предельном случае $\nu \rightarrow 0$ рассматриваемые равенства переходят в равенство (5.12,2). Для цилиндрических функций других типов имеют место аналогичные теоремы сложения, из которых мы упомянем следующие:

$$Z_\nu(\nu R) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_{\nu+m}(\lambda r_2) J_m(\lambda r_1) \frac{\cos m \theta}{\sin m \theta}, \quad (5.12,9)$$

$$\frac{Z_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{Z_{\nu+m}(\lambda r_2) J_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12,10)$$

$$I_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m I_{\nu+m}(\lambda r_2) I_m(\lambda r_1) \frac{\cos m \theta}{\sin m \theta}, \quad (5.12,11)$$

$$\frac{I_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\nu + m) \frac{I_{\nu+m}(\lambda r_2) I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta), \quad (5.12,12)$$

$$K_\nu(\lambda R) \frac{\cos \nu \psi}{\sin \nu \psi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_{\nu+m}(\lambda r_2) I_m(\lambda r_1) \frac{\cos m \theta}{\sin m \theta}, \quad (5.12,13)$$

$$\frac{K_\nu(\lambda R)}{(\lambda R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) \frac{K_{\nu+m}(\lambda r_2) I_{\nu+m}(\lambda r_1)}{(\lambda r_2)^\nu (\lambda r_1)^\nu} C_m^\nu(\cos \theta). \quad (5.12,14)$$

*) [В], гл. XI.

В этих формулах предполагается $r_2 > r_1$, за исключением того случая, когда ν есть целое число и в формулу входят только функции первого рода.

Важный частный случай рассматриваемых теорем сложения, встречающийся в математической физике, соответствует значению $\nu = \frac{1}{2}$. Формулы для этого случая легко получаются с помощью соотношений § 5.8 и равенства (5.12,7)*).

§ 5.13. Нули цилиндрических функций

При решении многих прикладных вопросов необходимо иметь представление о распределении нулей цилиндрических функций на плоскости комплексного переменного и уметь приближенно вычислять их значения. Исследование этой проблемы, представляющей также значительный теоретический интерес, выходит за рамки настоящей книги, поэтому мы ограничимся сводкой наиболее важных результатов, полученных в этой области, отсылая читателя за доказательствами к специальным монографиям по теории цилиндрических функций**).

Распределение нулей функций Бесселя с целым положительным значком, т. е. решений уравнения

$$J_n(z) = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (5.13,1)$$

устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4. *Функция $J_n(z)$ ($n=0, 1, 2, \dots$) не имеет комплексных нулей и имеет бесконечное множество вещественных нулей, расположенных на конечных интервалах симметрично относительно точки $z=0$, которая, в случае $n=1, 2, \dots$, принадлежит к их числу. Все нули функции — простые, за исключением точки $z=0$, которая при $n=1, 2, \dots$ является соответственно нулем кратности n .*

*) См., например, [В] 11.5, стр. 401.

**) См., например, [В], гл. XV.

Заметим, что некоторые из результатов исследований, относящихся к нулям цилиндрических функций, могут быть получены при помощи рассуждений вполне элементарного характера.

Распределение нулей функций Бесселя с произвольным вещественным индексом ν , т. е. решений уравнения

$$J_\nu(z) = 0 \quad (\nu - \text{вещественно}), \quad (5.13,2)$$

дается более общей теоремой 5.

Теорема 5. Функция $J_\nu(z)$ ($|\arg z| < \pi$, ν — любое вещественное число) имеет бесконечное множество вещественных положительных нулей и конечное число $2N(\nu)$ комплексных сопряженных нулей, где, в зависимости от значения параметра ν ,

(1) $N(\nu) = 0$, если $\nu > -1$ или $\nu = -1, -2, -3, \dots$

(2) $N(\nu) = m$ при $-(m+1) < \nu < -m$, $m = 1, 2, \dots$

Если $-2m - 2 < \nu < -2m - 1$, среди комплексных нулей имеется пара чисто мнимых.

Все нули функции простые, исключая, может быть, точку $z = 0$.

В математической физике часто встречается уравнение

$$\alpha J_\nu(z) + \beta z J'_\nu(z) = 0, \quad \nu > -1, \quad (5.13,3)$$

(где α и β — заданные вещественные числа, $|\arg z| < \pi$), которое можно рассматривать как обобщение уравнения (5.13,2). При указанном ограничении параметра ν рассматриваемое уравнение имеет бесконечное множество положительных корней и не имеет комплексных корней, за исключением случая $\frac{\alpha}{\beta} + \nu < 0$, когда это уравнение имеет два чисто мнимых корня.

Распределение нулей функции $I_\nu(z)$ может быть выведено из теоремы 5 с помощью соотношений § 5.7. В частности, отметим важный результат, что при $\nu > -1$ все нули функции $I_\nu(z)$ чисто мнимые. Функция Макдональда $K_\nu(z)$ при вещественном ν не имеет нулей в области $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2}$. Нули функции, лежащие в остальной части разрезанной плоскости, комплексные сопряженные и число их конечно*).

Для приближенного вычисления корней уравнений, содержащих цилиндрические функции, применяется метод после-

довательных приближений, причем за хорошее начальное приближение во многих случаях могут быть приняты корни соответствующих уравнений, получающихся из исходных при замене цилиндрических функций их асимптотическими представлениями.

§ 5.14. Разложение произвольных функций в ряды и интегралы по цилиндрическим функциям

В математической физике часто возникает необходимость разложить заданную функцию в ряд или интеграл по цилиндрическим функциям, причем вид разложения определяется конкретными условиями задачи (§§ 6.3—6.7). Мы рассмотрим наиболее важные из этих разложений, которые играют в различных приложениях цилиндрических функций такую же роль, как разложения в ряды и интегралы Фурье в приложениях тригонометрических функций. Первое место среди разложений рассматриваемого класса занимают ряды вида

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_\nu \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right), \quad 0 < r < a, \quad (5.14,1)$$

где $f(r)$ — заданная в интервале $(0, a)$ функция, $J_\nu(x)$ — функция Бесселя порядка $\nu > -\frac{1}{2}$, $x_{\nu m}$ — положительные корни уравнения $J_\nu(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания.

Коэффициенты разложения c_m могут быть определены на основании свойства ортогональности системы функций $J_\nu \left(x_{\nu m} \frac{r}{a} \right)$ ($m = 1, 2, \dots$), которое получается следующим образом. Умножим уравнения

$$u''_\alpha + \frac{1}{r} u'_\alpha + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_\alpha = 0, \quad u''_\beta + \frac{1}{r} u'_\beta + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) u_\beta = 0,$$

которым удовлетворяют функции $u_\alpha = J_\nu(\alpha r)$ и $u_\beta = J_\nu(\beta r)$ (α и β — произвольные числа), первое — на ru_β , второе — на ru_α , вычтем одно из другого и проинтегрируем по промежутку $(0, a)$.

*

*) [В], 15.7, стр. 562 — 564.

Мы находим тогда:

$$(\alpha^2 - \beta^2) \int_0^a r u_\alpha u_\beta dr = r (u_\alpha u'_\beta - u'_\alpha u_\beta) \Big|_0^a,$$

откуда, в предположении $\nu > 1$, следует:

$$\int_0^a r J_\nu(\alpha r) J_\nu(\beta r) dr = \frac{\alpha^2 J_\nu(\alpha a) J'_\nu(\beta a) - \alpha \alpha J'_\nu(\beta a) J_\nu(\alpha a)}{\alpha^2 - \beta^2}. \quad (5.14,2)$$

Если положить в (5.14,2) $\alpha = \frac{x_{\nu m}}{a}$, $\beta = \frac{x_{\nu n}}{a}$, то приходим к равенству

$$\int_0^a r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = 0, \quad m \neq n, \quad (5.14,3)$$

показывающему, что рассматриваемая система функций ортогональна на промежутке $(0, a)$ с весом r (§ 4.1).

Переходя к пределу $\beta \rightarrow \alpha$ в (5.14,2) и исключая вторые производные от функций Бесселя с помощью дифференциального уравнения (5.3,2), получаем:

$$\int_0^a r J_\nu^2(\alpha r) dr = \frac{a^2}{2} \left[J_\nu^2(\alpha a) + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2}\right) J_\nu^2(\alpha a) \right]. \quad (5.14,4)$$

откуда, если воспользоваться соотношением (5.3,5), имеем:

$$\int_0^a r J_\nu^2\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_\nu^2(x_{\nu n}) = \frac{a^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}). \quad (5.14,5)$$

Предполагая, что разложение вида (5.14,1) возможно, находим формально, путем умножения на $r J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right)$ и интегрирования по промежутку $(0, a)$, следующие значения коэффициентов c_m :

$$c_m = \frac{2}{a^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu m})} \int_0^a f(r) r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) dr, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.14,6)$$

Ряд (5.14,1) с коэффициентами, вычисленными по формулам (5.14,6), называется рядом Фурье — Бесселя.

Решение вопроса об условиях, обеспечивающих действительную сходимость рассматриваемого ряда к функции $f(r)$, дается следующей теоремой.

Теорема 6. Пусть $f(r)$ — произвольная функция, определенная на промежутке $(0, a)$ и удовлетворяющая условиям:

1°. $f(r)$ кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $(0, a)$;

2°. интеграл

$$\int_0^a r^{\frac{1}{2}} |f(r)| dr$$

имеет конечное значение.

Тогда ряд Фурье — Бесселя сходится и имеет своей суммой $\frac{1}{2}[f(r+0) + f(r-0)]$, т. е. представляет $f(r)$ во всякой точке непрерывности этой функции.

Доказательство теоремы можно найти в монографии Ватсона*).

Обобщение рядов Фурье — Бесселя представляют ряды Дини, к которым мы приходим, рассматривая задачу о разложении функции $f(r)$ в ряд вида (5.14,1) где $x_{\nu m}$ — расположенные в порядке возрастания положительные корни уравнения (5.13,3)

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J'_\nu(x) = 0. \quad (5.14,7)$$

Если воспользоваться соотношениями (5.14,2,4) и (5.14,7), то, так же как и выше, легко показать, что

$$\begin{aligned} & \int_0^a r J_\nu\left(x_{\nu m} \frac{r}{a}\right) J_\nu\left(x_{\nu n} \frac{r}{a}\right) dr = \\ & = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{a^2}{2} \left[J'_\nu(x_{\nu n}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{\nu n}^2}\right) J_\nu^2(x_{\nu n}) \right], & m = n, \end{cases} \quad (5.14,8) \end{aligned}$$

*) [В], 18,24, стр. 649—651.

откуда для коэффициентов c_m получаются значения:

$$c_m = \frac{2}{a^2 \left[J_\nu^2(x_{vm}) + \left(1 - \frac{\nu^2}{x_{vm}^2}\right) J_\nu^2(x_{vm}) \right]} \times \\ \times \int_0^a r f(r) J_\nu\left(x_{vm} \frac{r}{a}\right) dr. \quad (5.14,9)$$

Ряд (5.14,1) с коэффициентами, определяемыми формулами (5.14,9), носит название ряда Дини для функции $f(r)$. При условии, что $f(r)$ удовлетворяет условиям теоремы 6 и $\frac{\alpha}{\beta} + \nu > 0$, сумма ряда Дини равна $f(r)$ во всякой точке непрерывности функции *).

Разложения Фурье—Бесселя и Дини играют важную роль в проблемах математической физики. Примеры подобных разложений приведены в гл. VI (§ 6.3, 6.7).

Из интегральных разложений по функциям Бесселя первое место по своему прикладному значению занимает разложение в интеграл Фурье—Бесселя произвольной функции $f(r)$, определенной на промежутке $(0, \infty)$:

$$f(r) = \left. \begin{aligned} & \int_0^\infty \lambda J_\nu(\lambda r) d\lambda \int_0^\infty \rho J_\nu(\lambda \rho) f(\rho) d\rho, \\ & 0 < r < \infty, \quad \nu > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.14,10)$$

Формула (5.14,10) справедлива во всякой точке непрерывности $f(r)$ при выполнении условий: 1°. $f(r)$ — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $0 < r < a$; 2°. интеграл

$$\int_0^\infty r^{\frac{1}{2}} |f(r)| dr$$

имеет конечное значение **).

*) [В], 18.3—18.4, стр. 655—665. Там же смотри относительно видоизменений, которым подвергается разложение Дини, если $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \leq 0$.

**) См., например, [В], 14.4, стр. 502—511. В точках разрыва значение интеграла равно полусумме $\frac{1}{2} [f(r+0) + f(r-0)]$.

Примерами разложений рассматриваемого вида могут служить следующие формулы:

$$\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^\infty e^{-\lambda|z|} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (5.14,11)$$

$$\frac{e^{-k\sqrt{z^2 + r^2}}}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \int_0^\infty e^{-|z|\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \frac{\lambda J_0(\lambda r)}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} d\lambda, \quad (5.14,12)$$

которые легко получаются на основании (5.15,1) и (5.15,7).

Другое интегральное разложение, совершенно иного типа, содержащее интегрирование по значку цилиндрической функции и оказавшееся весьма полезным при рассмотрении различных проблем математической физики, было недавно исследовано автором *).

$$f(x) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \pi \tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau \int_0^\infty f(\xi) \frac{K_{i\tau}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi, \quad x > 0, \quad (5.14,13)$$

где $K_\nu(x)$ — функция Макдональда с мнимым значком $\nu = i\tau$, $f(x)$ — произвольная функция, заданная на интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяющая условиям:

1°. $f(x)$ — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком открытом промежутке $0 < x < a$;

2°. интегралы

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| x^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{1}{x} dx, \quad \int_{\frac{1}{2}}^\infty |f(x)| dx \quad (5.14,14)$$

имеют конечное значение.

В точке разрыва левую часть формулы (5.14,13) следует заменить полусуммой $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$.

Примером разложения рассматриваемого типа может служить формула:

$$f(x) = \sqrt{x} e^{-x \cos \alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau \operatorname{sh} \alpha \tau \frac{K_{i\tau}(x)}{\sqrt{x}} d\tau. \quad (5.14,15)$$

Некоторые приложения полученных формул к математической физике приведены в гл. VI.

*) Лебедев Н. Н. [1], [2].

§ 5.15. Определенные интегралы, содержащие цилиндрические функции

В приложениях часто встречается необходимость в вычислении определенных интегралов, содержащих цилиндрические функции в различных комбинациях с элементарными функциями и специальными функциями других типов. Метод вычисления таких интегралов заключается обычно в замене цилиндрической функции рядом или интегралом подходящего вида и перестановке порядка выполняемых операций.

Достаточно подробное изложение рассматриваемого вопроса имеется в монографии Ватсона*), в связи с чем мы ограничимся примерами, иллюстрирующими применение метода и содержащими результаты, необходимые в других разделах настоящей книги.

В качестве первого примера рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx,$$

где a и b — вещественные положительные числа.

Подставляя вместо $J_0(bx)$ ее интегральное представление (5.10,8), находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx &= \int_0^{\infty} e^{-ax} dx \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(bx \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(bx \sin \varphi) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Перемена порядка интегрирования законна ввиду абсолютной сходимости двойного интеграла. Таким образом:

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} J_0(bx) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad a > 0, b > 0. \quad (5.15,1)$$

*) [В], гл. XII—XIII.

Второй интересный пример доставляет интеграл Вебера

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx,$$

где $a > 0$, $b > 0$, $R(\nu) > -1$.

Для вычисления этого интеграла заменим функцию Бесселя степенным рядом (5.3,1) и проинтегрируем почленно. Мы получим тогда:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx &= \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{\nu+1} dx \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{bx}{2}\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} x^{2\nu+2k+1} dx = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{b}{2}\right)^{\nu+2k} \frac{1}{2a^{2\nu+2k+2}} \int_0^{\infty} e^{-t^{\nu+k}} dt = \\ &= \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}{k!} = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}. \end{aligned}$$

Законность перестановки порядка интегрирования и суммирования здесь также следует из абсолютной сходимости. Таким образом имеем:

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{b^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \quad (5.15,2)$$

$a > 0, b > 0, R(\nu) > -1.$

Следующий интеграл, часто встречающийся в приложениях,

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx)}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} dx, \quad a > 0, b > 0, -1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{3}{2},$$

может быть вычислен путем замены в подынтегральном выражении функции $(x^2+a^2)^{-\mu-1}$ интегралом типа (1.5,1):

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} = \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+a^2)t^{\mu}} dt, \quad R(\mu) > -1, \quad (5.15,3)$$

если предположить временно, что $-1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{1}{2}$.

Воспользовавшись формулой (5.15,2) и интегральным представлением (5.10,28) для функции Макдональда, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx) dx}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t} dt \int_0^{\infty} e^{-x^2 t} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \\ &= \frac{b^{\nu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-a^2 t - \frac{b^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1-\nu}} = \\ &= \frac{b^{\nu} a^{2\nu-2\mu}}{2^{\nu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^{\infty} e^{-u - \frac{(ab)^2}{4u}} \frac{du}{u^{\nu-\mu+1}} = \\ &= \frac{a^{\nu-\mu} b^{\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab). \end{aligned}$$

Распространение результата на все значения параметра μ , удовлетворяющие поставленному выше условию, может быть дано с помощью принципа аналитического продолжения. Поэтому мы имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu+1} J_{\nu}(bx) dx}{(x^2+a^2)^{\mu+1}} = \frac{a^{\nu-\mu} b^{\mu}}{2^{\mu} \Gamma(\mu+1)} K_{\nu-\mu}(ab), \quad (5.15,4)$$

$$a > 0, b > 0, -1 < R(\nu) < 2R(\mu) + \frac{3}{2}.$$

В частности, полагая в полученной формуле $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu = 0$, находим (§ 5.8):

$$\int_0^{\infty} \frac{x J_0(bx) dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{e^{-ab}}{b}, \quad a \geq 0, b > 0. \quad (5.15,5)$$

В заключение рассмотрим вычисление интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx,$$

$$a > 0, b > 0, y > 0, R(\nu) > -1,$$

который также имеет многочисленные приложения в математической физике.

Воспользовавшись интегральным представлением (5.10,28) и формулой (5.15,2), находим:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx &= \\ &= \frac{a^{\mu}}{2^{\mu+1}} \int_0^{\infty} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx \int_0^{\infty} e^{-t - \frac{a^2(x^2+y^2)}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} = \\ &= \frac{a^{\mu}}{2^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-t - \frac{a^2 y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu+1}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{a^2 x^2}{4t}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \\ &= 2^{\nu-\mu} a^{\mu-2\nu-2b^{\nu}} \int_0^{\infty} e^{-t \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{a^2 y^2}{4t}} \frac{dt}{t^{\mu-\nu}} = \\ &= \frac{2^{\nu-\mu} b^{\nu}}{a^{\mu}} (a^2 + b^2)^{\mu-\nu-1} \int_0^{\infty} e^{-u - \frac{y^2(a^2+b^2)}{4u}} \frac{du}{u^{\mu+\nu}} = \\ &= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{a^2+b^2}). \end{aligned}$$

Давая различные значения параметрам в формуле

$$\int_0^{\infty} \frac{K_{\mu}(a\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{\frac{\mu}{2}}} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx =$$

$$= \frac{b^{\nu}}{a^{\mu}} \left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{y} \right)^{\mu-\nu-1} K_{\mu-\nu-1}(y\sqrt{a^2+b^2}), \quad (5.15,6)$$

$$a > 0, b > 0, y > 0, R(\nu) > -1,$$

мы можем получить ряд полезных формул, встречающихся в приложениях. Например, полагая $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$, имеем:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx) x dx = \frac{e^{-y\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (5.15,7)$$

и т. д.

§ 5.16. Цилиндрические функции с вещественными положительными аргументом и значком

Содержание настоящего параграфа, который имеет вполне элементарный характер, составляет краткое описание свойств цилиндрических функций с аргументом $x \geq 0$ и значком $\nu \geq 0$, особенно часто встречающихся в приложениях.

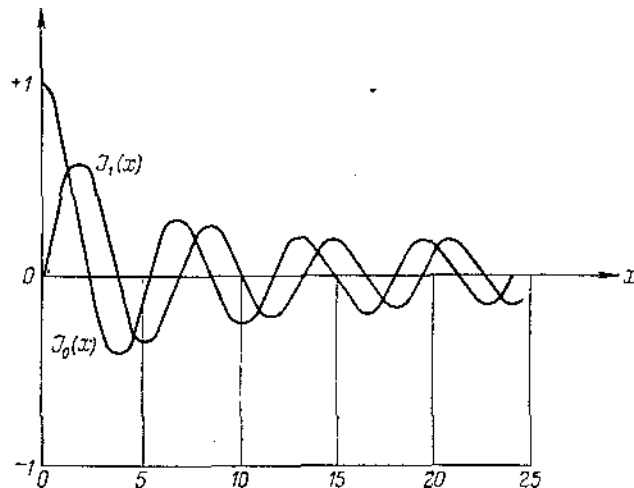


Рис. 17.

Для таких значений x и ν функция Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ представляет собой вещественную ограниченную функцию переменного x , имеющую колебательный характер. Поведение рассматриваемой функции при малых и больших значениях x дается соответственно формулами:

$$J_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad (5.16,1)$$

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Функция $J_\nu(x)$ имеет бесконечное множество нулей, к числу которых в случае $\nu > 0$ принадлежит также точка $x=0$. Графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ показаны на рис. 17.

§ 5.16] функции с положительными аргументом и значком 189

Функция Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ при $x > 0$ представляет вещественную ограниченную на бесконечности колеблющуюся функцию. Поведение этой функции при малых и больших значениях x характеризуется асимптотическими формулами:

$$Y_\nu(x) \approx -\frac{2^\nu \Gamma(\nu)}{\pi x^\nu}, \quad \nu > 0,$$

$$Y_\nu(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (5.16,2)$$

$$Y_0(x) \approx -\frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x},$$

показывающими, в частности, что $Y_\nu(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow 0$.

Функции Ханкеля $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$ для рассматриваемых значений x и ν являются комплексно сопряженными функциями, ограниченными при $x > 0$. Поведение этих функций для малых и больших значений x дается формулами:

$$H_\nu^{(1),(2)}(x) \approx \mp i \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \frac{\Gamma(\nu)}{\pi}, \quad \nu > 0,$$

$$H_\nu^{(1),(2)}(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\pm i\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad (5.16,3)$$

$$H_0^{(1),(2)}(x) \approx \mp i \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{x},$$

где верхний знак относится к функции первого, нижний — к функции второго рода. Очевидно, что $H_\nu^{(1),(2)}(x) \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow 0$.

Функции Бесселя мнимого аргумента $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ представляют собой вещественные положительные монотонные функции переменного x , из которых первая неограниченно растет, вторая — убывает при возрастании x . Для малых $x \rightarrow 0$:

$$I_\nu(x) \approx \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(1+\nu)}, \quad K_\nu(x) \approx \frac{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)}{x^\nu}, \quad (5.16,4)$$

$$K_0(x) \approx \ln \frac{2}{x},$$

поэтому $I_\nu(0) = 0$, $I_0(0) = 1$, $K_\nu(0) = \infty$, $\nu > 0$.

Асимптотическое поведение рассматриваемых функций при $x \rightarrow \infty$ представляется равенствами:

$$I_\nu(x) \approx \frac{e^x}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}, \quad K_\nu(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}. \quad (5.16,5)$$

Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ не имеют нулей при $x > 0$.

§ 5.17. Таблицы цилиндрических функций

Цилиндрические функции принадлежат к числу хорошо табулированных функций, что делает применение этих функций весьма удобным при рассмотрении различных вопросов физики и техники. Из числа наиболее распространенных и подробных таблиц цилиндрических функций в первую очередь должны быть упомянуты следующие таблицы*):

1. Б. И. Сегал и К. А. Семендяев, Пятизначные математические таблицы, Изд. АН СССР (1948):

$$J_0(x), J_1(x), Y_0(x), Y_1(x); \quad x = 0(0,01) 10.$$

$$I_0(x), I_1(x), K_0(x), K_1(x); \quad x = 0(0,01) 10.$$

2. Я. А. Люстерник, И. Я. Акушский и В. А. Диткин, Таблицы бесселевых функций, Гостехиздат (1949):

$$J_0(x), J_1(x), \quad x = 0(0,001) 25; \quad 7 \text{ зн.}$$

Там же приведены таблицы:

Корни уравнений и значения нормирующих множителей:

$$J_0(x) = 0, \quad x = \alpha_k; \quad 2 \{J_0'(\alpha_k)\}^{-1}$$

$$J_1(x) = 0, \quad x = \beta_k; \quad 2 \{J_0'(\beta_k)\}^{-1} = 2 \{J_1'(\beta_k)\}^{-1}$$

$$J_k(x) = 0, \quad x = \gamma_k; \quad 2 \{(1 - \gamma_k^{-2}) J_k'(\gamma_k)\}^{-1}$$

$$k = 1(1) 40.$$

Таблицы функций:

$$J_0(\alpha_k x), J_0(\beta_k x), \quad x = 0(0,01) 1; \quad k = 1(1) 40.$$

$$J_1(\beta_k x), J_1(\gamma_k x);$$

Последние таблицы имеют большое прикладное значение в связи с разложениями Фурье — Бесселя и Дини (§ 5.14), встречающимися в математической физике.

* По поводу обозначений см. § 1.6.

3. В. Н. Фаддеева и М. К. Гавурин, Таблицы функций Бесселя целых номеров, Гостехиздат (1950):

$$J_n(x), \quad x = 0(0,01) 125; \quad n = 0(1) 120; \quad 6 \text{ зн.}$$

$$J_n(x), \quad x = 0(0,01) 15; \quad 8 \text{ зн.}$$

Корни уравнений $J_n(x) = 0, \quad n = 0(1) 115$.

4. Г. Н. Ватсон [1]:

$$J_0(x), Y_0(x), J_1(x), Y_1(x)$$

$$|H_0^{(1)}(x)|, \arg H_0^{(1)}(x)$$

$$|H_1^{(1)}(x)|, \arg H_1^{(1)}(x) \quad x = 0(0,02) 16; \quad 7 \text{ зн.}$$

$$e^{-x} I_0(x), \quad e^x K_0(x)$$

$$e^{-x} I_1(x), \quad e^x K_1(x)$$

$$J_n(x): \quad x = 0(0,1) 5(1) 12; \quad n = 2(1) 5$$

$$x = 1(1) 12 \quad n = 6(1) 11$$

$$x = 4(1) 12 \quad n = 12(1) 17$$

$$x = 7(1) 12 \quad n = 18(1) 20$$

$$Y_n(x), \quad x = 0(0,1) 5, \quad n = 0(1) 10 \quad 7 \text{ зн.}$$

$$K_n(x), \quad x = 0(0,1) 5, \quad n = 0(1) 10$$

$$J_{\pm(n+\frac{1}{2})}(x), \quad x = 1(1) 50, \quad n = 0(1) 6 \quad 6 \text{ зн.}$$

$$R\{J_0(\rho e^{i\varphi})\}, I\{J_0(\rho e^{i\varphi})\} \quad \rho = 0(0,05) 10, \quad \varphi = 0(5^\circ) 90^\circ \quad 7 \text{ зн.}$$

$$R\{J_1(\rho e^{i\varphi})\}, I\{J_1(\rho e^{i\varphi})\}$$

Кроме того, помещены таблицы функций с индексом $\frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{3}{4}$, и ряд других таблиц

5. British Association Mathematical Tables 6, Cambridge (1937):

$$J_0(x), J_1(x), \quad x = 0(0,001) 16(0,01) 25$$

$$Y_0(x), Y_1(x), \quad x = 0(0,01) 25$$

$$I_0(x), I_1(x), \quad x = 0(0,001) 5 \quad 10 \text{ зн.}$$

$$K_0(x), K_1(x), \quad x = 0(0,01) 5$$

$$e^{-x} I_0(x), e^{-x} I_1(x), \quad x = 5(0,01) 10(0,1) 20$$

$$e^x K_0(x), e^x K_1(x),$$

6. С. Морган (Morgan S.), Tables of Bessel Functions of Imaginary Order and Imaginary argument. Pasadena (1947).

Табулированы функции:

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \tau} R \{I_{i\tau}(e^x)\},$$

$$\tau = 0,2 (0,2) 10; \quad x = -0,49 (0,01) 2,50,$$

$$-\frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi \tau} I \{I_{i\tau}(e^x)\} = K_{i\tau}(e^x),$$

$$\tau = 0,2 (0,2) 10 \quad x = -0,49 (0,01) 0,50$$

$$\tau = 1,2 (0,2) 10 \quad x = 0,51 (0,01) 1,00$$

$$\tau = 2,2 (0,2) 10 \quad x = 1,01 (0,01) 1,50$$

$$\tau = 4,2 (0,2) 10 \quad x = 1,51 (0,01) 2,00$$

$$\tau = 7,2 (0,2) 10 \quad x = 2,01 (0,01) 2,50$$

$$\tau = 0,2 (0,2) 7 \quad x = 1,0 (0,5) 2,5,$$

представляющие интерес в связи с § 6.5.

Библиографические сведения о таблицах цилиндрических функций можно найти в работе Бейтмана и Арчибальда [1], а также в индексе таблиц Флетчера, Миллера и Розенхеда [1].

Упражнения

1. Получить интегральные представления для квадрата функции Бесселя с целым знаком:

$$J_n^2(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{2n}(2z \cos \theta) d\theta = (-1)^n \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2z \cos \theta) \cos 2n\theta d\theta,$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

([B], стр. 41—43).

2. Вывести формулу более общего вида для произведения функций Бесселя с разными знаками:

$$J_\mu(z) J_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu+\nu}(2z \cos \theta) \cos(\mu - \nu)\theta d\theta,$$

$$R(\mu + \nu) > -1$$

([B], стр. 165).

3. Получить интегральные представления для функции Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} z^\nu}{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh} 2\nu t dt, \quad R(z) > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2};$$

$$K_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{x^\nu \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(1+t^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} dt, \quad x > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{2};$$

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\cos \frac{\nu\pi}{2}} \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t) \operatorname{ch} \nu t dt, \quad x > 0, \quad |R(\nu)| < 1.$$

Доказательство указанных формул можно найти, например, в монографии Ватсона ([B], стр. 206—209 и стр. 202).

4. Доказать следующие формулы:

$$K_\nu^2(x) K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(t + \frac{x^2+y^2}{t}\right)} K_\nu\left(\frac{xy}{t}\right) \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty K_0(\sqrt{x^2+y^2+2xy \operatorname{ch} t}) \operatorname{ch} \nu t dt, \quad x > 0, \quad y > 0,$$

$$K_\nu(x) K_\nu(y) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \int_{\operatorname{lg} \frac{y}{x}}^{\operatorname{lg} \frac{y}{x} + \pi} J_0(\sqrt{2xy \operatorname{ch} t - x^2 - y^2}) \operatorname{sh} \nu t dt,$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad |R(\nu)| < \frac{1}{4}.$$

5. Вывести интегральное представление для произведения функций первого и второго рода:

$$I_\nu(x) K_\nu(y) = \frac{1}{2} \int_{\operatorname{lg} \frac{y}{x}}^{\infty} J_0(\sqrt{2xy \operatorname{ch} t - x^2 - y^2}) e^{-\nu t} dt,$$

$$x > 0, \quad y > 0, \quad R(\nu) > -\frac{1}{4}.$$

6. Показать, что

$$K_\mu(x) K_\nu(x) = \int_0^\infty K_{\mu-\nu}\left(2x \operatorname{ch} \frac{t}{2}\right) \operatorname{ch} \frac{\mu+\nu}{2} t dt,$$

$$x > 0, \quad y > 0.$$

Указание к примерам 4—6. Наиболее подробное исследование, посвященное получению различных интегральных представлений для произведений цилиндрических функций, содержится в двух

работах Диксона и Феррара (A. Dixon and F. Ferrar, Quarterly J. Math., 4, p. 193; p. 297 (1933)). Некоторые из указанных формул приведены также у Ватсона ([B], стр. 483—485).

7. Получить асимптотические формулы для цилиндрических функций при больших значениях индекса:

$$J_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\nu + \nu \ln \frac{z}{2} - (\nu + \frac{1}{2}) \ln \nu}, \quad |\arg \nu| \leq \pi - \delta;$$

$$K_{\nu\tau}(x) \approx \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \tau \ln \tau - \tau - \tau \ln \frac{x}{2}\right), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

(x — фиксированное положительное число.)

Указание. Воспользоваться определением этих функций и применить асимптотическую формулу для гамма-функции (1.4, 22).

8. Показать, что при условии $R(\mu) > -\frac{1}{2}$, $R(\nu - \mu) > -1$:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(x)}{x^\mu} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1-\mu}{2}\right)}{2^\mu \Gamma\left(\frac{\nu+1+\mu}{2}\right)}$$

([B], стр. 428—429).

ЛИТЕРАТУРА к ГЛАВЕ V

- Ватсон Г. [1], Кузьмин Р. О. [1], Смирнов В. И. [1],
Грэй Э. и Метьюз Г. [1], Курант Р. и Гильберт Д. [1], Уиттекер и Ватсон [1].
Справочники: Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1],
Магнус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА VI

ПРИЛОЖЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 6.1. Введение

Как уже упоминалось (§ 5.1), цилиндрические функции имеют весьма широкую область применения в математической физике и технике, охватить которую, даже в самых общих чертах, в рамках данной книги не представляется возможным.

Настоящая глава посвящена приложениям цилиндрических функций к некоторым проблемам математической физики, причем выбор задач рассчитан главным образом на то, чтобы иллюстрировать различные стороны применения аппарата цилиндрических функций, и не претендует на сколько-нибудь полное освещение вопросов, относящихся по своему содержанию к курсам математической физики.

Наиболее подробно изложен раздел о решении красных задач теории потенциала для некоторых областей специального вида, в который, наряду с элементарными примерами, включены также проблемы более сложного характера, как, например, задача Дирихле для клиновидной области (§ 6.5).

Вместе с тем мы сочли возможным не помещать задач, относящихся к наиболее простым приложениям цилиндрических функций, составляющих содержание соответствующих разделов элементарных курсов математической физики, к которым мы отсылаем читателя, впервые приступившего к изучению данного круга вопросов.

§ 6.2. Разделение переменных в уравнении

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu$$

в цилиндрической системе координат

Источником для разнообразных приложений цилиндрических функций к задачам математической физики служит применение метода частных решений к уравнению

$$\Delta u = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu \quad (6.2,1)$$

(Δu — оператор Лапласа, t — время, a , b и c — заданные постоянные), частными случаями которого являются дифференциальные уравнения теории упругих колебаний, электродинамики, теории теплопроводности и т. д.

В тех случаях, когда по характеру граничных условий, наложенных на функцию u , целесообразно использовать систему цилиндрических координат (r, z, φ) , связанных с прямоугольными координатами (x, y, z) соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z \\ (0 \leq r < \infty, & -\pi < \varphi \leq \pi, & -\infty < z < \infty), \end{aligned} \quad (6.2,2)$$

рассматриваемое уравнение приводится к виду

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial u}{\partial t} + cu \quad (6.2,3)$$

и допускает бесконечное множество решений в форме произведения множителей, каждый из которых зависит от одного переменного:

$$u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi) T(t) \quad (6.2,4)$$

Подставляя (6.2,4) в (6.2,3) и разделив на $RZ\Phi T$, находим:

$$\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} + \frac{Z''}{Z} - c = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{a^2} T'' + bT' \right].$$

Вследствие независимости переменных, обе стороны полученного уравнения должны равняться некоторой постоянной, которую удобно обозначить через $(-\lambda^2)$.

Таким образом, мы имеем:

$$\frac{1}{a^2} T'' + bT' + \lambda^2 T = 0 \quad (6.2,5)$$

и

$$\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + \lambda^2 + \frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi} = c - \frac{Z''}{Z}.$$

В свою очередь, из последнего равенства вытекает, что каждая из сторон есть постоянная, которую мы положим равной $(-\lambda^2)$, откуда получаем:

$$Z'' - (\lambda^2 + c)Z = 0,$$

$$r^2 \left[\frac{1}{Rr} \frac{d}{dr} rR' + (\lambda^2 + \lambda^2) \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (6.2,6)$$

Обозначая новую постоянную через μ^2 , находим:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (6.2,7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + (\lambda^2 + \lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}) R = 0. \quad (6.2,8)$$

Таким образом, процесс разделения переменных приводит к бесконечной совокупности решений вида (6.2,4), зависящих от трех параметров (λ, λ, μ) , которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения*).

Определение множителей в произведении (6.2,4) сводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений (6.2,5—8), первые три из которых могут быть решены в элементарных функциях, а последнее при помощи введения нового переменного, пропорционального r , приводится к уравнению Бесселя (5.1,1), интегрируемому в цилиндрических функциях.

Решение задач математической физики получается путем суперпозиции найденных частных решений, причем выбор допустимых значений параметров (λ, λ, μ) и соответствующих им интегралов уравнений (6.2,5—8) производится согласно конкретным условиям рассматриваемой проблемы (§ 6.3—7).

Отметим некоторые результаты, относящиеся к разделению переменных в уравнении частного вида, получающихся из (6.2,1) при специальных значениях постоянных a , b и c .

(I). Уравнение Лапласа $\Delta u = 0$.

Это уравнение допускает частные решения вида

$$u = R(r) Z(z) \Phi(\varphi), \quad (6.2,9)$$

где

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + (\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}) R = 0;$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0; \quad \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0.$$

* Не ограничивая общности, можно считать, что каждый из параметров принадлежит произвольно выбранной полуплоскости, так как изменение знака не сказывается на значениях постоянных разделения λ^2 , λ^2 и μ^2 .

В частном случае, когда по условиям задачи u не зависит от координаты φ , получаем:

$$u = R(r)Z(z), \quad (6.2,10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \lambda^2 R = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

(II). Уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$.

Применение метода разделения переменных приводит к совокупности частных решений вида

$$u = R(r)Z(z)\Phi(\varphi), \quad (6.2,11)$$

где

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \left(\lambda^2 - \frac{\mu^2}{r^2}\right) R = 0,$$

$$Z'' - (\lambda^2 - k^2) Z = 0, \quad \Phi'' + \mu^2 \Phi = 0.$$

§ 6.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для цилиндра. Пример из теории теплопроводности

Важный класс стационарных задач математической физики составляют краевые задачи теории потенциала, которые заключаются в определении функции u , гармонической в некоторой трехмерной области (τ) , удовлетворяющей на ее границе условию одного из трех типов:

$$(I) u|_{\sigma} = f; \quad (II) \frac{du}{dn}|_{\sigma} = f; \quad (III) \frac{du}{dn} + hu|_{\sigma} = f, \quad (6.3,1)$$

где f — заданная функция точки на поверхности (σ) , n — внешняя нормаль к поверхности *).

В качестве простого примера укажем на задачу об отыскании стационарного распределения температуры в теле заданной формы по известному распределению температуры на его поверхности, которая эквивалентна первой краевой задаче, соответствующей условию вида (I), а также на многочисленные задачи электростатики, магнитостатики и т. д.

* Функция $u = u(x, y, z)$ называется гармонической в области (τ) , если она непрерывна в этой области вместе с производными первых двух порядков по (x, y, z) и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$. По поводу формулировок краевых задач см., например, В. И. Смирнов [2], гл. IV, § 2, а также § 8.1 настоящей книги.

В том случае, когда область (τ) представляет собой цилиндр, краевые задачи могут быть решены при помощи метода разделения переменных, если предположить, что функция равна нулю на боковой поверхности цилиндра или на его торцах. Общий случай произвольных граничных условий первого рода может быть сведен к этим частным случаям путем разложения задачи на две вспомогательные, с граничными условиями указанного специального вида *).

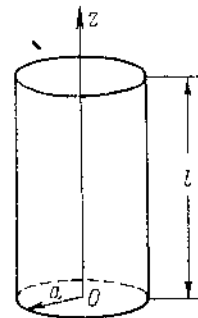


Рис. 18.

Введем систему цилиндрических координат (r, z, φ) , ось z которой совпадает с осью цилиндра, а начало координат лежит в плоскости одного из торцов (рис. 18), и предположим, для определенности, что мы имеем дело с первой краевой задачей.

В соответствии с замечанием, сделанным выше, достаточно ограничиться рассмотрением двух частных случаев, когда граничные условия имеют вид:

$$(a) u|_{r=a} = 0, \quad u|_{z=0} = f_0, \quad u|_{z=l} = f_l; \quad (6.3,2)$$

$$(б) u|_{r=a} = F, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0.$$

Для упрощения предположим, что граничные условия не содержат переменной φ , т. е. $f_0 = f_0(r)$, $f_l = f_l(r)$ и $F = F(z)$. Искомая функция u тогда также не будет зависеть от φ , поэтому, согласно § 6.2, частные решения уравнения Лапласа могут быть представлены в форме $u = R(r)Z(z)$, где множители суть интегралы дифференциальных уравнений:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \lambda^2 R = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0. \quad (6.3,3)$$

* Решение представляется в виде суммы двух гармонических функций, одна из которых удовлетворяет граничным условиям (а), другая — условиям (б).

Следует заметить, что в общем случае неоднородных граничных условий для решения задачи, вместо метода частных решений, целесообразно пользоваться методом Гринберга (Гринберг Г. А. [1]), устраняющим необходимость в таком приведении, которое во многих случаях является причиной излишне сложной формы решения и не всегда возможно в случае граничных условий типа (II).

Выполнив интегрирование, находим:

$$R = A I_0(\lambda r) + B Y_0(\lambda r), \quad Z = C \operatorname{ch} \lambda z + D \operatorname{sh} \lambda z; \quad (6.3,4)$$

$J_0(x)$ и $Y_0(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Предположим, что граничные условия имеют вид (а). Так как $I_0(\lambda r) \rightarrow 1$, $Y_0(\lambda r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, мы должны для ограниченности решения на оси цилиндра положить $B \equiv 0$, после чего из однородного граничного условия следует $A J_0(\lambda a) = 0$, откуда определяются допустимые значения параметра λ : $\lambda = \lambda_n = \frac{x_n}{a}$, где x_n — положительные нули функции Бесселя $J_0(x)$ (§ 5.13).

Таким образом, получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа:

$$u = u_n = \left[M_n \operatorname{ch} \frac{x_n z}{a} + N_n \operatorname{sh} \frac{x_n z}{a} \right] J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.3,5)$$

из которых, путем их суперпозиции, может быть построено решение рассматриваемой задачи. Действительно, предположим, что каждая из функций $f_0(r)$ и $f_l(r)$ может быть разложена в ряд Фурье — Бесселя (§ 5.14)

$$f_0(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_0)_n J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right), \quad (6.3,6)$$

$$f_l(r) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_l)_n J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right),$$

где

$$(f)_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(x_n)} \int_0^a f(r) r J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right) dr, \quad (6.3,7)$$

и рассмотрим ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(f_0)_n \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{l-z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} + (f_l)_n \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} \right] J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right), \quad (6.3,8)$$

составленный из членов вида (6.3,5). Тогда граничные условия будут удовлетворены, и ряд (6.3,8) дает решение поставленной задачи *).

В случае граничных условий типа (б) для того, чтобы удовлетворить однородным граничным условиям, необходимо положить $C = 0$ и выбрать λ чисто мнимым числом, равным $\frac{n\pi i}{l}$ ($n = 1, 2, \dots$). Интегралы уравнений (6.3,3) принимают в этом случае вид:

$$R = A I_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right) + B K_0 \left(\frac{n\pi}{l} r \right), \quad Z = D \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (6.3,9)$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента (§ 5.7).

Так как $K_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, следует принять $B = 0$; следовательно, подходящая система частных решений уравнения Лапласа будет:

$$u = u_n = M_n I_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \sin \frac{n\pi z}{l}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.3,10)$$

Искомое решение может быть построено в форме ряда

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{I_0 \left(\frac{n\pi r}{l} \right)}{I_0 \left(\frac{n\pi a}{l} \right)} \sin \frac{n\pi z}{l}, \quad (6.3,11)$$

где F_n — коэффициенты Фурье в разложении функции $F(z)$ в ряд по $\sin \frac{n\pi z}{l}$:

$$F_n = \frac{2}{l} \int_0^l F(z) \sin \frac{n\pi z}{l} dz. \quad (6.3,12)$$

Решение краевых задач с граничными условиями других типов получается аналогичным образом, причем подходящим аппаратом, заменяющим ряды Фурье — Бесселя, являются в этом случае ряды Дини (§ 5.14).

* Речь идет о формальном решении, которое нуждается еще в последующей проверке.

Обобщение на случай граничных условий, содержащих зависимость от угловой координаты φ , достигается путем построения совокупности частных решений уравнения Лапласа вида (6.2,9).

Значение параметра μ определяется при этом из условия непрерывности

$$u \Big|_{\varphi=-\pi} = u \Big|_{\varphi=\pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=-\pi} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\pi}, \quad (6.3,13)$$

которое равносильно требованию периодичности решения относительно φ и дает $\mu = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$). Дальнейший анализ отличается от выполненного только незначительными деталями и приводит к следующим частным решениям уравнения Лапласа:

$$u = u_{m,n} = \left[M_{m,n} \operatorname{ch} \frac{x_{mn} z}{a} + N_{m,n} \operatorname{sh} \frac{x_{mn} z}{a} \right] J_m \left(x_{mn} \frac{r}{a} \right) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (6.3,14)$$

$$u = u_{m,n} = M_{m,n} I_m \left(\frac{n\pi r}{l} \right) \sin \frac{n\pi z}{l} \cdot \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}, \quad (6.3,15)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$ и x_{mn} — положительные нули функции Бесселя $J_m(x)$.

Решение краевых задач с граничными условиями (6.3,2) получается суперпозицией найденных частных решений в форме двойных рядов, коэффициенты которых определяются путем разложения функций $f_0 = f_0(r, \varphi)$, $f_l = f_l(r, \varphi)$ и $F = F(z, \varphi)$ в ряды соответствующего типа.

В виде простого примера, иллюстрирующего изложенную выше методику, дадим решение задачи о распределении температуры в цилиндре, один торец которого имеет температуру u_0 , а остальная поверхность поддерживается при нулевой температуре. Искомое решение получается непосредственно из (6.3,8), если положить $f_0 = u_0$, $f_l = 0$, откуда, если воспользоваться для вычисления интеграла (6.3,7) формулой (5.3,6), следует:

$$u = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} x_n \frac{l-z}{a}}{\operatorname{sh} x_n \frac{l}{a}} \cdot \frac{J_0 \left(x_n \frac{r}{a} \right)}{x_n J_1(x_n)} \quad (6.3,16)$$

§ 6.4. Краевая задача для области, ограниченной двумя параллельными плоскостями

Метод частных решений позволяет получить также решение краевых задач теории потенциала для области, представляющей собой слой, ограниченный двумя параллельными плоскостями (рис. 19).

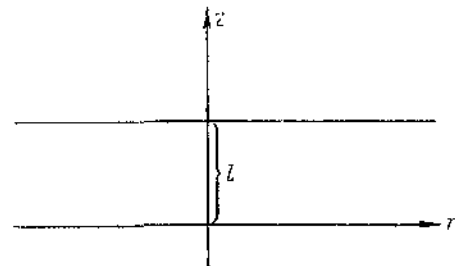


Рис. 19.

Рассмотрим в качестве примера первую краевую задачу и ограничимся случаем симметрии вращения, когда функции f_0 и f_l в граничных условиях

$$u|_{z=0} = f_0, \quad u|_{z=l} = f_l \quad (6.4,1)$$

зависят только от переменного r .

Искомая функция $u = u(r, z)$, гармоническая в области $0 < z < l$ и удовлетворяющая условиям (6.4,1), может быть построена из частных решений уравнения Лапласа вида

$$u = u_\lambda [M_\lambda \operatorname{ch} \lambda z + N_\lambda \operatorname{sh} \lambda z] J_0(\lambda r) \quad (0 \leq \lambda < \infty) \quad (6.4,2)$$

путем интегрирования их по параметру λ .

Предполагая, что граничные функции допускают представление с помощью интеграла Фурье—Бесселя (5.14,10), мы получаем формальное решение задачи в виде

$$u = \int_0^\infty \left[(f_0)_\lambda \frac{\operatorname{sh} \lambda (l-z)}{\operatorname{sh} \lambda l} + (f_l)_\lambda \frac{\operatorname{sh} \lambda z}{\operatorname{sh} \lambda l} \right] J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (6.4,3)$$

где

$$(f)_\lambda = \lambda \int_0^\infty f(r) r J_0(\lambda r) dr. \quad (6.4,4)$$

Аналогичным образом может быть найдено решение соответствующей краевой задачи для полуплоскости $z > 0$. Если граничное условие имеет вид $u|_{z=0} = f(r)$, то искомое решение будет:

$$u = \int_0^{\infty} (f)_\lambda e^{-\lambda z} I_0(\lambda r) d\lambda. \quad (6.4.5)$$

§ 6.5. Краевая задача для клиновидной области

Еще один вид области, для которой краевые задачи теории потенциала могут быть решены методом частных решений с использованием аппарата цилиндрических функций, представляет собой клиновидная область, ограниченная двумя пересекающимися плоскостями (рис. 20).

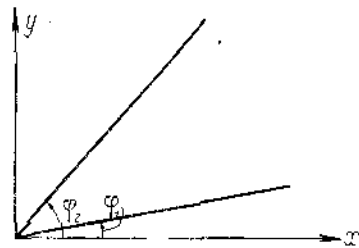


Рис. 20.

Чтобы получить совокупность частных решений уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, подходящих для рассмотрения данного класса задач, введем систему цилиндрических координат, ось z которой совпадает с линией пересечения плоскостей, и положим в (6.2, 9) $\lambda = i\sigma$, $\mu = i\tau$, где σ и τ изменяются в промежутке $(0, \infty)$. Интегралы рассматриваемых уравнений тогда будут:

$$R = A I_{i\tau}(sr) + B K_{i\tau}(sr), \quad \Phi = C \operatorname{ch} \tau \varphi + D \operatorname{sh} \tau \varphi, \\ Z = E \cos \sigma z + F \sin \sigma z;$$

$I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента (§ 5.7); A, B, \dots, F — произвольные постоянные.

Принимая во внимание асимптотический характер поведения функций $I_{i\tau}(sr)$ и $K_{i\tau}(sr)$ при $r \rightarrow \infty$, мы должны выбрать $A = 0$, что приводит к следующей совокупности решений:

$$u = u_{\sigma, \tau} = [M_{\sigma, \tau} \operatorname{ch} \tau \varphi + N_{\sigma, \tau} \operatorname{sh} \tau \varphi] K_{i\tau}(sr) \frac{\cos \sigma z}{\sin \sigma z} \quad (6.5.1) \\ (0 \leq \sigma < \infty, 0 \leq \tau < \infty).$$

Полученная система пригодна для решения краевой задачи первого рода в случае клиновидной области, ограниченной плоскостями $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ *

Примем для упрощения рассуждений, что функции $f_p = f_p(r, z)$ в граничных условиях

$$u|_{\varphi = \varphi_p} = f_p; \quad p = 1, 2, \quad (6.5.2)$$

а следовательно, и искомое решение $u = u(r, z, \varphi)$ суть четные функции переменного z **.

Допуская, что каждая из функций f_p разлагается в промежутке $(-\infty, \infty)$ в интеграл Фурье

$$f_p = f_p(r, z) = \int_0^{\infty} (f_p)_{\sigma} \cos \sigma z d\sigma, \quad (6.5.3)$$

где

$$(f_p)_{\sigma} = g_p(\sigma, r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f_p \cos \sigma z dz, \quad (6.5.4)$$

мы будем искать решение рассматриваемой задачи в виде двойного интеграла

$$u = \int_0^{\infty} \cos \sigma z d\sigma \int_0^{\infty} [G_1(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi)}{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi_1)} + \\ + G_2(\sigma, \tau) \frac{\operatorname{sh} \tau (\varphi - \varphi_1)}{\operatorname{sh} \tau (\varphi_2 - \varphi_1)}] K_{i\tau}(sr) d\tau, \quad (6.5.5)$$

образованного из выражений типа (6.5.1) путем интегрирования по параметрам (σ, τ) .

Для определения функций $G_p(\sigma, \tau)$ получаем тогда соотношения

$$g_p(\sigma, r) = \int_0^{\infty} G_p(\sigma, \tau) K_{i\tau}(sr) d\tau, \quad (0 < r < \infty), \quad (6.5.6)$$

* Устоимся таким образом приписывать индексы у f_p , чтобы рассматриваемой области соответствовал промежуток $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$.

** Случай, когда f_p — нечетные функции z , исследуется совершенно аналогичным образом, а общий случай приводится к рассмотренным путем разложения задачи на две с четными и нечетными граничными условиями:

$$u|_{\varphi = \varphi_p} = \frac{1}{2} [f_p(r, z) \pm f_p(r, -z)].$$

откуда можно найти эти функции, если разложить левую сторону равенств (6.5,6) в интеграл по функциям $K_{it}(a\tau)$.

В ряде случаев требуемое разложение может быть выполнено с помощью формулы (5.14,13), которая, если положить $x = a\tau$, $\xi = a\rho$, $f(x) x^{1/2} = g(a, r)$ принимает вид:

$$g(a, r) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \tau \operatorname{sh} \pi \tau K_{it}(a\tau) d\tau \int_0^{\infty} g(a, \rho) \frac{K_{it}(a\rho)}{\rho} d\rho. \quad (6.5,7)$$

Теорема разложения (6.5,7) справедлива, если $g(a, r)$, рассматриваемая как функция переменного r , есть непрерывная функция с ограниченной вариацией во всяком промежутке $0 < a \leq r \leq b < \infty$, и интегралы

$$(a) \int_0^{1/a} \left| g(a, r) r^{-1} \right| g \frac{1}{r} dr; \quad (b) \int_{1/a}^{\infty} \left| g(a, r) \right| r^{-1/2} dr \quad (6.5,8)$$

имеют конечное значение.

При условии, что функции $g_p(a, r)$ принадлежат к рассматриваемому классу функций, сравнение (6.5,6) и (6.5,7) дает:

$$G_p(a, \tau) = \frac{2}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^{\infty} g_p(a, r) \frac{K_{it}(a\tau)}{r} dr, \quad (6.5,9)$$

и формула (6.5,5) доставляет формальное решение задачи. Однако во многих случаях условие (a) оказывается невыполненным, так как $g_p(a, r)$ при $r \rightarrow 0$ стремится к пределу $g_p(a, 0)$, вообще говоря, отличному от нуля.

Чтобы обойти это затруднение, положим в этом случае

$$g_p^*(a, r) = g_p(a, r) - g_p(a, 0) e^{-ar} \quad (6.5,10)$$

и допустим, что, как это обычно имеет место в проблемах физического характера, условия применимости формулы (6.5, 7), выполнены для функции $g_p^*(a, r)$. Мы имеем тогда по предыдущему:

$$g_p^*(a, r) = \int_0^{\infty} G_p^*(a, \tau) K_{it}(a\tau) d\tau, \quad (6.5,11)$$

где

$$G_p^*(a, \tau) = \frac{2}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^{\infty} g_p^*(a, r) \frac{K_{it}(a\tau)}{r} dr. \quad (6.5,12)$$

С другой стороны, легко доказать формулу *)

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{it}(x) d\tau = e^{-x} \quad (x > 0), \quad (6.5,13)$$

откуда следует:

$$g_p(a, 0) e^{-ar} = \frac{2}{\pi} g_p(a, 0) \int_0^{\infty} K_{it}(a\tau) d\tau. \quad (6.5,14)$$

Складывая (6.5,11) и (6.5,14), мы получим искомое представление функции $g_p(a, r)$ в виде интеграла по функциям $K_{it}(a\tau)$, сопоставление которого с (6.5,6) приводит к следующему значению коэффициентов $G_p(a, \tau)$:

$$G_p(a, \tau) = G_p^*(a, \tau) + \frac{2}{\pi} g_p(a, 0). \quad (6.5,15)$$

Решение задачи, как и выше, дается формулой (6.5,5).

§ 6.6. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного вблизи края тонкой проводящей плоскости

В виде примера на приложение метода, изложенного в § 6.5, дадим решение задачи о поле точечного заряда q , помещенного вблизи прямолинейного края тонкой проводящей пластинки, находящейся при нулевом потенциале. Чтобы не усложнять вычислений, ограничимся рассмотрением частного случая, когда заряд q расположен в точке A , лежащей в той же плоскости, что и проводящая пластинка.

Если выбрать систему координат таким образом, чтобы ось z совпадала с краем пластинки, а ось x проходила

*) Если разложить функцию $\omega(x) = e^{-x \operatorname{ch} \alpha}$ в интеграл Фурье по $\cos \tau \alpha$, то, воспользовавшись (5.10,25), находим:

$$e^{-x \operatorname{ch} \alpha} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_{it}(x) \cos \tau \alpha d\tau \quad (x > 0),$$

и требуемый результат получается, если положить $\alpha = 0$.

через точку A (рис. 21), и представить потенциал электростатического поля ψ в виде суммы потенциалов первичного и индуцированного зарядов

$$\psi = \psi_0 + u, \quad \psi_0 = \frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}}, \quad (6.6,1)$$

то рассматриваемая задача сводится к частному случаю общей

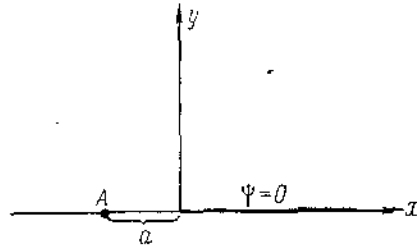


Рис. 21.

проблемы § 6.5, соответствующему значениям:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi, f_1(r, z) = f_2(r, z) = -\frac{q}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}}. \quad (6.6,2)$$

Воспользовавшись интегральным представлением примера 3 упражнения к гл. V, получаем:

$$\begin{aligned} (f_p)_z = g_p(\sigma, r) &= -\frac{2q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \sigma z}{\sqrt{(r+a)^2 + z^2}} dz = \\ &= -\frac{2q}{\pi} K_0(\sigma(r+a)), \end{aligned} \quad (6.6,3)$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

В рассматриваемом случае $g_p(\sigma, 0) = -\frac{2q}{\pi} K_0(\sigma a)$, поэтому, в соответствии с изложенной выше методикой, необходимо предварительно найти значения величин:

$$G_p^*(\sigma, \tau) = -\frac{4q}{\pi^2} \tau \operatorname{sh} \pi \tau \int_0^\infty \frac{K_0(\sigma(r+a)) - K_0(\sigma a) e^{-\sigma r}}{r} K_{it}(\sigma r) dr. \quad (6.6,4)$$

Так как вычисление интеграла довольно сложно, приведем лишь его результат:

$$G_p^*(\sigma, \tau) = \frac{4q}{\pi^2} [K_0(\sigma a) - K_{it}(\sigma a)]. \quad (6.6,5)$$

Подставляя (6.6,5) в (6.5,15), получаем

$$G_p(\sigma, \tau) = -\frac{4q}{\pi^2} K_{it}(\sigma a), \quad (6.6,6)$$

и формула (6.5,5) дает:

$$u = -\frac{4q}{\pi^2} \int_0^\infty \cos \sigma z d\sigma \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \tau(\pi - \varphi)}{\operatorname{ch} \pi \tau} K_{it}(\sigma a) K_{it}(\sigma r) d\tau. \quad (6.6,7)$$

Интеграл (6.6,7) может быть выражен в замкнутой форме через элементарные функции.

Окончательный результат вычислений имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \times \\ &\times \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \right), \end{aligned} \quad (6.6,8)$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{2q}{\pi \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}} \times \\ &\times \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{ar} \sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \varphi + z^2}}. \end{aligned} \quad (6.6,9)$$

Плотность распределения заряда по поверхности пластинки определяется равенством:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_s = -\frac{q}{2\pi^2} \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{(r+a)^2 + z^2}. \quad (6.6,10)$$

§ 6.7. Приложение к теории теплопроводности. Задача об охлаждении цилиндра

В качестве примера приложения цилиндрических функций к нестационарным задачам математической физики рассмотрим задачу об охлаждении бесконечно длинного цилиндра радиуса a , нагретого до температуры $u_0 = f(r)$ (r — расстояние от оси

цилиндра) и излучающего тепло в окружающую среду, находящуюся при нулевой температуре. С математической точки зрения задача приводится к интегрированию уравнения теплопроводности

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u \quad (6.7,1)$$

(c , ρ , k — теплоемкость, плотность и коэффициент теплопроводности вещества),

при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(r) \quad (6.7,2)$$

и граничном условии

$$-k \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=a} = \lambda u \Big|_{r=a} \quad (6.7,3)$$

(λ — коэффициент теплоотдачи в окружающую среду).

Если, следуя методу Фурье, искать частные решения уравнения (6.7,1) вида $u = R(r)T(t)$, то для определения множителей получаются уравнения

$$bT' + \lambda^2 T = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} rR' + \lambda^2 R = 0 \quad \left(b = \frac{c\rho}{k}\right),$$

откуда следует:

$$R = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r), \quad T = Ce^{-\frac{\lambda^2}{b}t}.$$

Так как при $r \rightarrow 0$ $J_0(\lambda r) \rightarrow 1$, $Y_0(\lambda r) \rightarrow \infty$, то для ограниченности решения на оси цилиндра необходимо положить $B = 0$, после чего из условия (6.7,3) вытекает, что параметр λ должен быть выбран таким образом, чтобы удовлетворялось уравнение

$$hJ_0(\lambda a) - \lambda J_1(\lambda a) = 0,$$

где $h = \frac{\lambda}{k}$.

Если положить $\lambda a = x$, то последнее уравнение приводится к виду:

$$h\lambda J_0(x) - xJ_1(x) = 0, \quad (6.7,4)$$

откуда следует, что оно имеет только вещественные корни, расположенные симметрично относительно начала координат (§ 5.13).

Обозначая положительные корни уравнения (6.7,4) через x_n ($0 < x_1 < x_2 < \dots$), получаем, что допустимые значения параметра λ будут $\lambda_n = \frac{x_n}{a}$ и, таким образом, совокупность частных решений уравнения (6.7,1), пригодных для рассмотрения данной задачи, имеет вид:

$$u = u_n = M_n e^{-\frac{x_n^2}{a^2 b}t} J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right); \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.7,5)$$

Суммируя найденные решения, находим:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} M_n e^{-\frac{x_n^2}{a^2 b}t} J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right), \quad (6.7,6)$$

где, в соответствии с начальным условием (6.7,2), коэффициенты M_n должны быть выбраны таким образом, чтобы удовлетворялось равенство:

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n J_0\left(x_n \frac{z}{a}\right) \quad (0 \leq r < a). \quad (6.7,7)$$

Последняя задача равносильна задаче разложения функции $f(r)$ в ряд Дина, и ее решение может быть получено из общих формул § 5.14. Воспользовавшись этими формулами, находим

$$M_n = \frac{2}{a^2 [J_0^2(x_n) + J_1^2(x_n)]} \int_0^a r f(r) J_0\left(x_n \frac{r}{a}\right) dr, \quad (6.7,8)$$

и решение рассматриваемой проблемы теории теплопроводности представляется рядом (6.7,6).

§ 6.8. Приложение к теории диффракции

Как пример на приложение цилиндрических функций третьего рода, рассмотрим задачу о диффракции плоской электромагнитной волны, падающей на бесконечно длинный проводящий цилиндр радиуса a .

Пусть (r, z, φ) будет система цилиндрических координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра, и отсчет угла φ

ведется от направления, вдоль которого распространяется волна.

В предположении, что зависимость от времени характеризуется множителем $e^{i\omega t}$ (ω — частота колебаний) и вектор электрического поля в падающей и отраженной волне параллелен оси цилиндра, рассматриваемая задача приводится к определению комплексной амплитуды вторичного поля E , удовлетворяющей Уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E}{\partial \varphi^2} + k^2 E = 0, \quad (6.8,1)$$

граничному условию

$$E \Big|_{r=a} + E_0 e^{-ika \cos \varphi} = 0 \quad (6.8,2)$$

и условию излучения:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial E}{\partial r} + ikE \right) \sqrt{r} = 0, \quad r^{\frac{1}{2}} E = O(1). \quad (6.8,3)$$

Здесь $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, E_0 — амплитуда падающей плоской волны.

Применяя метод разделения переменных, находим, что частные решения Уравнения (6.8,1), периодические относительно координаты φ , будут

$$E = E_n = [M_n H_n^{(1)}(kr) + N_n H_n^{(2)}(kr)] \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.8,4)$$

где $H_n^{(1)}, (2)}(kr)$ — функции Ханкеля первого и второго рода (§ 5.6).

Из условия симметрии следует, что E — четная функция от φ , поэтому достаточно ограничиться решениями, содержащими $\cos n\varphi$. Далее, для того чтобы удовлетворить принципу излучения, надлежит, принимая во внимание асимптотическое поведение функций Ханкеля на бесконечности (§ 5.11), положить $M_n = 0$. Таким образом, решение задачи следует искать в форме:

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} N_n H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi. \quad (6.8,5)$$

Из граничного условия (6.8,2) вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} N_n H_n^{(2)}(ka) \cos n\varphi + E_0 e^{-ika \cos \varphi} = 0. \quad (6.8,6)$$

Если положить в (5.3,4) $z = ka$, $t = -ie^{i\varphi}$, то получим:

$$e^{-ika \cos \varphi} = J_0(ka) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(ka) \cos n\varphi, \quad (6.8,7)$$

откуда следует:

$$N_0 H_0^{(2)}(ka) = -E_0 J_0(ka), \quad N_n H_n^{(2)}(ka) = -2E_0 (-i)^n J_n(ka),$$

и искомое решение дается формулой:

$$E = -E_0 \left[\frac{J_0(ka)}{H_0^{(2)}(ka)} H_0^{(2)}(kr) + \right. \\ \left. - 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \right]. \quad (6.8,8)$$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VI

Кузьмин Р. О. [1], Грэй Э. и Метьюз Г. [1], Левин В. И. и Гроссберг Ю. И. [1], Тихонов А. Н. и Самарский А. А. [1], Франк Ф. и Мизес Р. [1], Бейтман [1], Джеффрис Х. и Джеффрис Б. [1].

ГЛАВА VII СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 7.1. Введение

Сферическими функциями называются решения линейного дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right] u = 0, \quad (7.1,1)$$

где z — комплексное переменное, μ и ν — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения.

Уравнение (7.1,1) встречается в математической физике в связи с интегрированием уравнения Лапласа в специальных системах ортогональных криволинейных координат — сферических, сфероидальных, тороидальных и др., которые применяются при рассмотрении краевых задач для областей соответствующего вида. Простейшими среди них являются краевые задачи для сферической области, что служит основанием для того, чтобы называть рассматриваемый класс функций сферическими или шаровыми функциями. В этом случае переменное z принимает вещественные значения, принадлежащие промежутку $(-1, +1)$, а параметры μ и ν имеют целые положительные значения; однако рассмотрение краевых задач математической физики для областей другого вида требует изучения сферических функций при достаточно общих предположениях относительно области изменения переменных z , μ и ν *). Для большинства приложений

*) См. гл. VIII, где даны примеры задач, в которых переменное z и параметры μ и ν принимают различные вещественные или комплексные значения.

является достаточной теория сферических функций, построенная в предположении, что z — комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом вдоль отрезка вещественной оси $(-\infty, 1)$, или вещественно и принадлежит промежутку $(-1, 1)$, ν — произвольное вещественное или комплексное число и $\mu = m$ — целое положительное число ($m = 0, 1, 2, \dots$). Указанные ограничения приняты в настоящей книге. Более общее исследование читатель может найти в монографии Гобсона*) и других работах, посвященных теории сферических функций, краткий список которых приведен в указателе литературы.

§ 7.2. Гипергеометрическое дифференциальное уравнение и его решение с помощью рядов

Прежде чем приступить к изложению теории сферических функций, целесообразно рассмотреть вопрос об интегрировании линейного дифференциального уравнения

$$z(1 - z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0, \quad (7.2,1)$$

где z — комплексное переменное, α , β и γ — параметры, которые могут иметь различные вещественные или комплексные значения.

Уравнение (7.2,1) называется гипергеометрическим и включает, как частные случаи, многие дифференциальные уравнения, встречающиеся в приложениях.

Если привести уравнение (7.2,1) к стандартной форме, разделив его на коэффициент при второй производной, то коэффициенты полученного уравнения будут регулярными функциями переменного z в области $0 < |z| < 1$, имеющими при $z = 0$ полюс первого порядка или обыкновенную точку, в зависимости от значений параметров α , β и γ .

Из общей теории линейных дифференциальных уравнений следует, что в таком случае рассматриваемое уравнение должно иметь частное решение вида

$$u = z^\nu \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad (7.2,2)$$

*) Е. В. Гобсон [1].
В дальнейшем ссылки на эту книгу обозначаются буквой [Г].

где s — надлежаще выбранное число, $c_0 \neq 0$, степенной ряд сходится при $|z| < 1$ *).

Подставляя (7.2,2) в уравнение (7.2,1), находим после простых вычислений:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k-1} (s+k)(s+k-1+\gamma) - \\ - \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{s+k} (s+k+\alpha)(s+k+\beta) = 0,$$

откуда для определения показателя s и коэффициентов c_k получается система уравнений:

$$c_0 s (s-1+\gamma) = 0, \quad c_k (s+k)(s+k-1+\gamma) - \\ - c_{k-1} (s+k-1+\alpha)(s+k-1+\beta) = 0, \\ k=1, 2, \dots,$$

первое из которых дает $s=0$ или $s=1-\gamma$.

Предположим, что γ не является нулем или целым отрицательным числом ($\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$), и выберем $s=0$. Тогда для вычисления коэффициентов c_k получим рекуррентное соотношение

$$c_k = \frac{(k-1+\alpha)(k-1+\beta)}{k(k-1+\gamma)} c_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

откуда, если принять $c_0=1$, следует

$$c_k = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k}, \quad k=0, 1, 2, \dots,$$

где для сокращения записи введено обозначение

$$(\lambda)_k = \lambda(\lambda+1) \dots (\lambda+k-1), \quad (\lambda)_0 = 1, \\ k=1, 2, \dots \quad (7.2,3)$$

Таким образом, частное решение уравнения (7.2,1) при $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ будет **)

$$u = u_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} z^k, \quad |z| < 1. \quad (7.2,4)$$

*) См., например, В. И. Смирнов [1], § 98.

**) Если γ — нуль или отрицательное целое число, то, начиная с некоторого k , коэффициенты c_k обращаются в бесконечность и решение вида (7.2,2) для значения $s=0$ не может быть построено. Легко видеть, что решение этого типа получается, если взять $s=1-\gamma$.

Ряд (7.2,4) называется гипергеометрическим рядом. Сходимость этого ряда при $|z| < 1$ следует из общей теории линейных дифференциальных уравнений. Если воспользоваться признаком Даламбера, то, независимо от упомянутой теории, легко доказать, что радиус сходимости ряда (7.2,4) равен единице, за исключением единственного случая, когда один из параметров (α, β) равен нулю или целому отрицательному числу, и ряд превращается в полином.

Аналогично, выбирая $s=1-\gamma$, получаем, в предположении, что $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$,

$$c_k = \frac{(k-\gamma+\alpha)(k-\gamma+\beta)}{k(k+1-\gamma)} c_{k-1}, \quad k=1, 2, \dots,$$

откуда, если взять $c_0=1$, находим:

$$c_k = \frac{(1-\gamma+\alpha)_k (1-\gamma+\beta)_k}{k! (2-\gamma)_k}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, при $\gamma \neq 2, 3, 4, \dots$, уравнение (7.2,1) имеет частное решение

$$u = u_2 = z^{1-\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\gamma+\alpha)_k (1-\gamma+\beta)_k}{k! (2-\gamma)_k} = \\ = z^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z), \quad |z| < 1. \quad (7.2,5)$$

Если γ не является целым числом ($\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то оба решения (7.2,4—5) существуют одновременно и линейно независимы между собой, так что общий интеграл уравнения (7.2,1) может быть представлен в форме *)

$$u = AF(\alpha, \beta, \gamma, z) + \\ + Bz^{1-\gamma} F(1-\gamma+\alpha, 1-\gamma+\beta, 2-\gamma, z), \quad (7.2,6)$$

где A и B — произвольные постоянные, $|z| < 1$.

Для целых значений γ изложенный способ позволяет получить только одно частное решение, и для построения второго линейно независимого решения, содержащего в общем случае логарифмические члены, требуется видоизменение методики.

Путем замены переменных в (7.2,1) можно получить ряд других дифференциальных уравнений, интегралы которых

*) Линейная независимость следует из рассмотрения асимптотического поведения решений при $z \rightarrow 0$. При $\gamma=1$ оба решения совпадают.

могут быть представлены через гипергеометрические ряды. Так, например, полагая $z = t^2$, приходим к дифференциальному уравнению

$$t(1-t^2) \frac{d^2u}{dt^2} + 2 \left[\gamma - \frac{1}{2} - \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2} \right) t^2 \right] \frac{du}{dt} - 4\alpha\beta tu = 0, \quad (7.2,7)$$

частными интегралами которого будут функции

$$u = u_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, t^2), \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots, \quad (7.2,8)$$

$$u = u_2 = t^{2-2\gamma} F(1-\gamma-\alpha, 1-\gamma-\beta, 2-\gamma, t^2), \quad \gamma \neq 2, 3, 4, \dots, \quad (7.2,9)$$

образующие при любом γ , не равном целому числу, систему линейно независимых решений этого уравнения в смежности с точкой $t=0$.

§ 7.3. Сферические функции Лежандра

Простейший класс сферических функций составляют полиномы Лежандра, рассмотренные в гл. IV, которые являются решениями уравнения (7.2,1) при $\mu=0$ и целом положительном $\nu=n$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Следующий по степени сложности класс сферических функций образуют сферические функции Лежандра, которые представляют собой решения рассматриваемого уравнения при $\mu=0$ и произвольном вещественном или комплексном ν , т. е. являются интегралами уравнения:

$$(1-z^2)u'' - 2zu' + \nu(\nu+1)u = 0. \quad (7.3,1)$$

Чтобы определить эти функции, заметим предварительно, что посредством введения надлежащих переменных уравнение (7.3,1) может быть приведено к гипергеометрическому дифференциальному уравнению. Так, например, подстановка $t = \frac{1}{2}(1-z)$ преобразует (7.3,1) в уравнение

$$t(1-t) \frac{d^2u}{dt^2} + (1-2t) \frac{du}{dt} + \nu(\nu+1)u = 0, \quad (7.3,2)$$

которое представляет собой частный случай уравнения (7.2,1), соответствующий значениям $\alpha = -\nu$, $\beta = 1 + \nu$, $\gamma = 1$.

Далее, подстановка $t = 1/z^2$, $u = z^{-\nu-1} v$ переводит (7.3,1) в уравнение

$$t(1-t) \frac{d^2v}{dt^2} + \left[\left(\nu + \frac{3}{2} \right) - \left(\nu + \frac{5}{2} \right) t \right] \frac{dv}{dt} - \left(\frac{\nu}{2} + 1 \right) \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2} \right) v = 0, \quad (7.3,3)$$

которое получается из (7.2,1), если положить

$$\alpha = \frac{\nu}{2} + 1, \quad \beta = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \quad \gamma = \nu + \frac{3}{2},$$

и т. д.

Из результатов § 7.2 следует, что дифференциальное уравнение (7.3,1) имеет частные решения

$$u = u_1 = F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad |z-1| < 2, \quad (7.3,4)$$

$$u = u_2 = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} (2z)^{\nu+1} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad |z| > 1, \quad (7.3,5)$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ обозначает, как и выше, гипергеометрический ряд. Однако полученные решения определены лишь в ограниченной части плоскости комплексного переменного z и не могут быть использованы за ее пределами без надлежащего аналитического продолжения рассматриваемых гипергеометрических рядов. Чтобы получить это продолжение для первого из найденных решений, предположим, что z — комплексное число, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$ вдоль вещественной оси, и рассмотрим интеграл

$$P_\nu(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f_\nu\left(\frac{z-1}{2} \sin^2 \varphi\right) d\varphi, \quad (7.3,6)$$

где

$$f_\nu(w) = \frac{(\sqrt{1+w} + \sqrt{w})^{2\nu+1} + (\sqrt{1+w} - \sqrt{w})^{2\nu+1}}{2\sqrt{1+w}}, \quad f_\nu(0) = 1. \quad (7.3,7)$$

Определенная таким образом функция $f_\nu(w)$ регулярна в плоскости (w), разрезанной вдоль $(-\infty, -1)^*$. Поэтому, при любом φ , принадлежащем промежутку интегрирования, подынтегральное выражение представляет собой регулярную функцию z в плоскости (z) с разрезом $(-\infty, -1)$, и, согласно известной теореме (стр. 12), $P_\nu(z)$ есть регулярная функция в рассматриваемой разрезанной плоскости.

Для $|w| < 1$ функция $f_\nu(w)$ может быть разложена в ряд Тейлора:

$$f_\nu(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k.$$

Коэффициенты этого разложения проще всего определить, заметив, что $f_\nu(w)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w(1+w) \frac{d^2 f_\nu}{dw^2} + \left(\frac{1}{2} + 2w\right) \frac{df_\nu}{dw} - \nu(\nu+1)f_\nu = 0. \quad (7.3,8)$$

Последнее при замене w на $(-w)$ переходит в гипергеометрическое уравнение (7.2,1) с параметрами $\alpha = -\nu$, $\beta = \nu + 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$, единственным интегралом которого, приводящимся к единице при $w = 0$, является функция

$$\begin{aligned} f_\nu(w) &= F\left(-\nu, \nu + 1, \frac{1}{2}, -w\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu + 1)_k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} (-w)^k, \end{aligned} \quad (7.3,9)$$

где $|w| < 1$.

Если $|z-1| < 2$, мы можем, воспользовавшись разложением (7.3,9) и интегрируя ряд почленно, представить функцию $P_\nu(z)$ в виде:

*) Точка $w=0$ — обыкновенная точка функции $f_\nu(w)$, так как при обходе вокруг этой точки $f_\nu(w)$ принимает прежнее значение.

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\varphi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu + 1)_k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \sin^{2k} \varphi = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu + 1)_k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Перестановка порядка суммирования и интегрирования законна, так как ряд сходится равномерно. Интегрируя по частям, находим, что

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \varphi \cdot d\varphi = \frac{(1/2)_k}{k!}, \quad (7.3,10)$$

откуда следует

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu + 1)_k}{k! k!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^k = \\ &= F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right) \equiv u_1. \end{aligned} \quad (7.3,11)$$

Таким образом, функция $P_\nu(z)$ при $|z-1| < 2$ совпадает с определенной выше функцией u_1 и, следовательно, представляет собой аналитическое продолжение этой последней в плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$.

В соответствии с основным принципом аналитического продолжения, функция $P_\nu(z)$, которая по доказанному является решением уравнения (7.3,1) при $|z-1| < 2$, удовлетворяет этому уравнению во всей области, где она определена.

Функция $P_\nu(z)$ называется сферической функцией Лежандра первого рода с индексом ν . Формула (7.3,6) дает общее представление для этой функции, пригодное на всей разрезанной вдоль $(-\infty, -1)$ плоскости комплексного переменного z , где $P_\nu(z)$ есть регулярная функция. В той части этой плоскости, где $|z-1| < 2$, $P_\nu(z)$ может быть представлена гипергеометрическим рядом

$$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad |z-1| < 2. \quad (7.3,12)$$

Из формулы (7.3,12) вытекает, что

$$P_\nu(1) = 1. \quad (7.3,13)$$

Мы увидим ниже, что всякое решение уравнения (7.3,1), линейно независимое с решением $u = P_\nu(z)$, неограниченно возрастает при $z \rightarrow 1$, поэтому функция Лежандра первого рода может быть определена также как интеграл рассматриваемого уравнения, приводящийся к единице, когда $z \rightarrow 1$.

Так как $f_\nu(w)$ представляет собой целую функцию ν , из (7.3,6) вытекает, что сферическая функция Лежандра первого рода $P_\nu(z)$ является целой функцией индекса ν .

Из легко проверяемого тождества $f_{-\nu-1}(w) = f_\nu(w)$ следует, что

$$P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z) \quad (7.3,14)$$

для любых вещественных или комплексных значений ν .

Чтобы получить аналитическое продолжение второго из найденных выше решений уравнения (7.3,1), предположим, что z принадлежит плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, параметр ν удовлетворяет условию $R(\nu) > -1$, и рассмотрим интеграл

$$Q_\nu(z) = \int_0^\infty \varphi_\nu \left(\frac{z-1}{2} \operatorname{ch}^2 \varphi \right) d\varphi, \quad (7.3,15)$$

где

$$\varphi_\nu(w) = \frac{(V\sqrt{1+w} - Vw)^{2\nu+1}}{V\sqrt{1+w}}, \quad \varphi_\nu(0) = 1. \quad (7.3,16)$$

Функция $\varphi_\nu(w)$ представляет собой регулярную функцию на плоскости (w) с разрезом $(-\infty, 0)$. При выполнении ограничений, наложенных выше на z и ν , комплексное переменное $w = \frac{z-1}{2} \operatorname{ch}^2 \varphi$ принадлежит этой плоскости и интеграл сходится равномерно в области $0 < \delta \leq |z-1| \leq A < \infty$, $|\arg(z-1)| < \pi$, поэтому $Q_\nu(z)$ есть регулярная функция z на плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$.

Предположим временно, что z — вещественное число, большее, чем единица, и введем новое переменное интегрирования t , положив $\operatorname{ch} \varphi = \sqrt{\frac{zt-1}{z-1}}$. Принимая во внимание тождество

$$\sqrt{\frac{zt+1}{2}} - \sqrt{\frac{zt-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{zt + \sqrt{z^2t^2 - 1}}},$$

получаем:

$$Q_\nu(z) = \sqrt{\frac{z}{2}} \int_1^\infty \frac{(zt + \sqrt{z^2t^2 - 1})^{-\nu-1/2}}{Vz^2t^2 - 1} \frac{dt}{\sqrt{t-1}}. \quad (7.3,17)$$

Последняя формула может быть записана в виде

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \int_1^\infty \psi_\nu \left(\frac{1}{z^2t^2} \right) \frac{dt}{t^{\nu+3/2} (t-1)^{1/2}} \quad (7.3,18)$$

где положено:

$$\psi_\nu(w) = 2^{\nu+1/2} \frac{(1 + \sqrt{1-w})^{-\nu-1/2}}{V\sqrt{1-w}}, \quad \psi_\nu(0) = 1. \quad (7.3,19)$$

Функция $\psi_\nu(w)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного w , регулярна в круге $|w| < 1$, следовательно, может быть разложена в ряд

$$\psi_\nu(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k, \quad |w| < 1. \quad (7.3,20)$$

Коэффициенты этого разложения можно определить, заметив, что ψ_ν удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$w(1-w)\psi_\nu'' + \left[\nu + \frac{3}{2} - (\nu+3)w \right] \psi_\nu' - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4} \right) \psi_\nu = 0, \quad (7.3,21)$$

* Чтобы упростить проверку этого утверждения, которая несколько утомительна, удобно сначала показать, что

$$\begin{aligned} (\psi_\nu V\sqrt{1-w})' &= \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \psi_\nu}{2(1 + \sqrt{1-w})}, \\ [V\sqrt{1-w} (\psi_\nu V\sqrt{1-w})]' &= \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{4(1 + \sqrt{1-w})^2} \psi_\nu, \end{aligned}$$

умножить первое уравнение на $\left(\nu + \frac{3}{2}\right) V\sqrt{1-w}$, второе — на w и, выполнив дифференцирование в левой части, сложить оба уравнения.

которое представляет собой частный случай гипергеометрического дифференциального уравнения (7.2,1), соответствующий значениям

$$\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}, \quad \gamma = \nu + \frac{3}{2}.$$

Принимая во внимание, что $\psi_\nu(0) = 1$, получаем для $|\omega| < 1$:

$$\begin{aligned} \psi_\nu(\omega) &= F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}, \frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}, \nu + \frac{3}{2}, \omega\right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right)_k}{k! \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_k} \omega^k. \end{aligned} \quad (7.3,22)$$

Воспользовавшись последним разложением, находим, что при $z > 1$:

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \int_1^\infty \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right)_k}{k! \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_k} \cdot \frac{1}{z^{2k}} = \\ &= \frac{1}{(2z)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right)_k}{k! \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_k} \times \\ &\times \frac{1}{z^{2k}} \int_1^\infty \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}}. \end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования и суммирования может быть обоснована путем доказательства абсолютной сходимости рассматриваемого выражения.

Далее, полагая $t = 1/s$, имеем (§ 1.5):

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} = \\ &= \int_0^1 s^{2k+\nu} (1-s)^{-1/2} ds = B\left(2k + \nu + 1, \frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{\Gamma(2k + \nu + 1) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(2k + \nu + \frac{3}{2}\right)}, \end{aligned}$$

или, если воспользоваться формулой удвоения гамма-функции (1.2,3):

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty \frac{dt}{t^{2k+\nu+\frac{3}{2}} \sqrt{t-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma\left(k + \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(k + \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right)} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + 1\right)_k}{\left(\frac{\nu}{2} + \frac{3}{4}\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + \frac{5}{4}\right)_k}. \end{aligned} \quad (7.3,23)$$

Подставляя значение интеграла, находим:

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)_k \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)_k}{k! \left(\nu + \frac{3}{2}\right)_k} \cdot \frac{1}{z^{2k}} = \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1}} \times \\ &\times F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right) \equiv u_2. \end{aligned} \quad (7.3,24)$$

Таким образом, при $z > 1$ функция $Q_\nu(z)$ совпадает с ранее найденным решением u_2 уравнения (7.3,1). Так как в области $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$, $Q_\nu(z)$ и u_2 — регулярные функции, из (7.3,24) вытекает, что $Q_\nu(z)$ представляет собой аналитическое продолжение u_2 в плоскость с разрезом

$(-\infty, 1)$ и удовлетворяет уравнению (7.3,1). Функция $Q_\nu(z)$ называется сферической функцией Лежандра второго рода с индексом ν .

Формула (7.3,15) даст общее представление этой функции, пригодное на всей разрезанной вдоль $(-\infty, 1)$ плоскости комплексного переменного z , где $Q_\nu(z)$ представляет собой регулярную функцию. В той части разрезанной плоскости, где $|z| > 1$, $Q_\nu(z)$ может быть представлена рядом

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{3}{2})} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right). \quad (7.3,25)$$

Как нетрудно усмотреть из (7.3,15),

$$Q_\nu(z) \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow 1, \quad (7.3,26)$$

поэтому $Q_\nu(z)$ есть решение уравнения (7.3,1), линейно независимое с $P_\nu(z)$.

Так как $\varphi_\nu(w)$ — целая функция ν и интеграл (7.3,15) сходится равномерно в области $R(\nu) \geq -1 + \delta$, δ произвольное малое положительное число, то $Q_\nu(z)$ представляет собой регулярную функцию индекса ν в области $R(\nu) > -1$. Если параметр ν не удовлетворяет условию $R(\nu) > -1$, то интеграл (7.3,15) расходится и не может быть использован для аналитического продолжения решения u_2 уравнения (7.3,1).

Чтобы доказать возможность аналитического продолжения в плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$ также для этого случая, обозначим сумму ряда (7.3,5), которая определена для z , принадлежащих области $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$, и произвольных значений параметра ν , исключая $\nu = -1, -2, \dots$, через $q_\nu(z)$, так что $u_2 \equiv q_\nu(z)$. Тогда легко показать путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях равенства, что для функций $q_\nu(z)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$q_\nu(z) = \frac{2\nu+3}{\nu+1} z q_{\nu+1}(z) - \frac{\nu+2}{\nu+1} q_{\nu+2}(z). \quad (7.3,27)$$

Пользуясь этим рекуррентным соотношением, мы можем представить u_2 при любом $\nu \neq -1, -2, \dots$ в виде конечной суммы, каждое слагаемое которой есть произведение

функции $q_{\nu+p}(z)$ с индексом $\mu = \nu + p$, удовлетворяющим условию $R(\mu) > -1$, на полином относительно z с коэффициентами, рациональными относительно ν . Заменяя в этой сумме каждую из функций $q_{\nu+p}(z)$ ее аналитическим продолжением $Q_{\nu+p}(z)$, которое дается формулой (7.3,15), мы получим регулярную в плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$ функцию $Q_\nu(z)$, совпадающую с u_2 при $|z| > 1$ и, следовательно, являющуюся искомым аналитическим продолжением. Таким образом, функция Лежандра второго рода $Q_\nu(z)$ определена при любых $\nu \neq -1, -2, \dots$ и представляет собой регулярную функцию z в плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$.

Из указанного способа построения функции $Q_\nu(z)$ вытекает, что единственными особыми точками этой функции, рассматриваемой как функция параметра ν , являются простые полюсы $\nu = -1, -2, \dots$. Следовательно, $Q_\nu(z)$ есть мероморфная функция ν с полюсами в указанных точках.

Общий интеграл уравнения (7.3,1) может быть представлен в виде линейной комбинации функций Лежандра первого и второго рода

$$u = AP_\nu(z) + BQ_\nu(z), \quad (7.3,28)$$

где $|\arg(z-1)| < \pi$, $\nu \neq -1, -2, \dots$

В приложениях встречается также необходимость находить общий интеграл рассматриваемого уравнения при условии, что переменное $z = x$ есть вещественное число, принадлежащее интервалу $(-1, 1)$.

Так как функция $P_\nu(z)$ определена для таких z , то достаточно построить второе линейно независимое решение. Таким решением, как нетрудно убедиться, является функция

$$Q_\nu(x) = \frac{1}{2} [Q_\nu(x+i0) + Q_\nu(x-i0)], \quad (7.3,29)$$

равная полусумме значений функции $Q_\nu(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза*). Общий интеграл уравнения (7.3,1) при $z = x$ ($-1 < x < 1$) будет:

$$u = AP_\nu(x) + BQ_\nu(x), \quad \nu \neq -1, -2, \dots \quad (7.3,30)$$

*) В немецкой литературе символы $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ используются исключительно для обозначения решений (7.3,1), относящихся к промежутку $-1 < z < 1$, а в остальных случаях применяются соответствующие готические буквы.

§ 7.4. Интегральные представления для сферических функций

Сферические функции Лежандра допускают различные интегральные представления с помощью определенных или контурных интегралов, содержащих переменные z и ν как параметры. Наибольшей общностью из этих представлений обладают, как правило, формулы, включающие контурные интегралы, однако для приложений наиболее важное значение имеют интегральные представления, даваемые вещественными интегралами, в связи с чем мы ограничимся исключительно формулами этого типа, отсылая читателя по поводу других интегральных представлений к работам Гобсона и Барнса*).

Чтобы получить первое из интегральных представлений для функции $P_\nu(z)$, предположим, что $z = \operatorname{ch} \alpha$, $\alpha \geq 0$, и введем в (7.3,6) новое переменное интегрирования θ , положив $\operatorname{sh} \frac{\theta}{2} = \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \psi$. Мы получим тогда

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta \quad (7.4,1)$$

для любого вещественного или комплексного значения индекса ν .

Если записать последнюю формулу в виде

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{e^{-(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta$$

и положить затем

$$e^\theta = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cdot \cos \psi,$$

то после несложного вычисления приходим к другому важному интегральному представлению для функции Лежандра первого рода:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \psi)^{\nu+1}}, \quad (7.4,2)$$

где ν — произвольное число.

* [Г], ссылка на стр. 215; Е. Барнс [1].

Заменив в (7.4,2) ν на $(-\nu-1)$ и воспользовавшись соотношением (7.3,14), находим:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \cos \psi)^\nu d\psi. \quad (7.4,3)$$

Если $-1 < R(\nu) < 0$, то функция $P_\nu(\operatorname{ch} \alpha)$ допускает еще два полезных интегральных представления, которые могут быть выведены из (7.4,1) с помощью контурного интегрирования.

Рассмотрим с этой целью интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_C \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})t}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} t}} dt,$$

взятый по контуру C , состоящему из отрезков $(-\infty, -\alpha - \rho)$, $(-\alpha + \rho, \alpha - \rho)$, $(\alpha + \rho, \infty)$ вещественной оси,

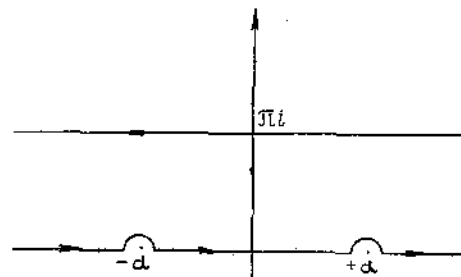


Рис. 22.

замыкающих их полуокружностей малого радиуса ρ , выключающих точки разветвления $t = \pm \alpha$, и прямой $I(t) = \pi$ (рис. 22).

Полагая $f(t) = \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} t}$ и принимая $\arg f = 0$ на отрезке $(-\alpha + \rho, \alpha - \rho)$, находим, что значения $\arg t$ на отрезке $(\alpha + \rho, \infty)$ вдоль прямой $I(t) = \pi$ и на отрезке $(-\infty, -\alpha - \rho)$ соответственно будут $-\frac{\pi}{2}$, 0 и $+\frac{\pi}{2}$.

Внутри C рассматриваемая ветвь функции регулярна и при указанном выше ограничении параметра ν интегралы по замыкающим отрезкам $R(t) = \pm N$ стремятся к нулю, когда $N \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл по контуру C равен нулю.

Интегралы по малым полуокружностям стремятся к нулю при $\rho \rightarrow 0$, поэтому, переходя к пределу и учитывая изменение $\arg f$ вдоль пути интегрирования, получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta - \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta + \pi i}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta - \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{e^{(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta = 0, \end{aligned}$$

или, после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{2}{\pi} e^{(\nu + \frac{1}{2})\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \\ & + \frac{2}{\pi i} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad -1 < R(\nu) < 0. \end{aligned} \quad (7.4,4)$$

Заменяя в (7.4,4) ν на $(-\nu - 1)$ и принимая во внимание (7.3,14), имеем:

$$\begin{aligned} P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{2}{\pi} e^{-(\nu + \frac{1}{2})\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta - \\ & - \frac{2}{\pi i} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \end{aligned} \quad (7.4,5)$$

где снова $-1 < R(\nu) < 0$.

Складывая и вычитая полученные формулы, находим:

$$\begin{aligned} 2P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{4}{\pi} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \\ 0 &= \frac{4i}{\pi} \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta + \\ & - \frac{4}{\pi i} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \end{aligned}$$

откуда следуют искомые интегральные представления:

$$P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta + 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad -1 < R(\nu) < 0, \quad (7.4,6)$$

$$P_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ctg}\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \pi \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad -1 < R(\nu) < 0. \quad (7.4,7)$$

Интегральные представления для функции Лежандра второго рода могут быть получены из формулы (7.3,15). Полагая в этой последней $z = \operatorname{ch} \alpha$ ($\alpha \geq 0$), $\operatorname{sh} \frac{\theta}{2} = \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ch} \varphi$, находим:

$$Q_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-(\nu + \frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \theta - 2 \operatorname{ch} \alpha}} d\theta, \quad (7.4,8)$$

где $R(\nu) > -1$.

С помощью подстановки $e^{\theta} = \operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \psi$ формула (7.4,8) приводится к виду:

$$Q_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \psi)^{\nu + 1}}, \quad R(\nu) > -1. \quad (7.4,9)$$

Равенства (7.4,1—9) доказаны в предположении, что $\alpha \geq 0$, т. е. $z = \operatorname{ch} \alpha \geq 1$, однако, в соответствии с принципом аналитического продолжения, они остаются справедливыми во всей области комплексных значений α , где обе стороны рассматриваемых формул представляют собой голоморфные функции. Например, формула (7.4,2) верна в области $R(\operatorname{ch} \alpha) > 0$, формула (7.4,6) — во всей плоскости z с разрезом $(-\infty, -1)$ и т. д.

В заключение приведем интегральное представление для функции $P_\nu(z)$, пригодное для интервала $-1 < z \leq 1$. Полагая в этом случае в формуле (7.3,6)

$$z = \cos \beta \quad (0 \leq \beta \leq \pi), \quad \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\beta}{2} \sin \varphi,$$

находим:

$$P_\nu(\cos \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos \beta}} d\theta \quad (7.4,10)$$

для любых значений индекса ν .

§ 7.5. Функциональные соотношения для сферических функций

Дифференциальное уравнение (7.3,1) не меняется, если заменить в нем ν на $(-\nu-1)$ или z на $(-z)$, поэтому, наряду с интегралами $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$, решениями этого уравнения будут также функции $P_{-\nu-1}(z)$, $Q_{-\nu-1}(z)$, $P_\nu(-z)$, $Q_\nu(-z)$. Так как всякие три интеграла линейного дифференциального уравнения второго порядка связаны линейным соотношением, между упомянутыми решениями уравнения (7.3,1) должны существовать определенные функциональные соотношения, простейшим среди которых является равенство, установленное в § 7.3:

$$P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z) \quad (7.5,1)$$

Чтобы получить соотношение, связывающее $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ и $Q_{-\nu-1}(z)$, предположим временно, что $z > 1$ и

$-1 < R(\nu) < 0$. Тогда $-1 < R(-\nu-1) < 0$ и, воспользовавшись формулами (7.4,7—8), мы имеем:

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - Q_{-\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) = \pi \operatorname{ctg} \nu \pi \cdot P_\nu(\operatorname{ch} \alpha),$$

или

$$\sin \nu \pi [Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z)] = \pi \cos \nu \pi \cdot P_\nu(z) \quad (7.5,2)$$

Так как при z , принадлежащем плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, левая и правая части равенства (7.5,2) являются регулярными функциями, это соотношение сохраняет силу во всей разрезанной плоскости. Если исключить целые значения ν , обе стороны (7.5,2) остаются регулярными функциями ν также вне рассматриваемой полосы, поэтому формула верна при всех $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Полагая в (7.5,2) $\nu = n + \frac{1}{2}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, находим:

$$Q_{n+\frac{1}{2}}(z) = Q_{-n-\frac{1}{2}}(z) \quad (7.5,3)$$

Для вывода следующего функционального соотношения предположим сначала, что z принадлежит плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$ и $|z| > 1$. Формула (7.3,25) тогда дает:

$$Q_\nu(-z) = -e^{\pm \nu \pi i} Q_\nu(z), \quad \nu \neq -1, -2, \dots, \quad (7.5,4)$$

где берется верхний или нижний знак, смотря по тому $I(z) \geq 0$.

Воспользовавшись принципом аналитического продолжения, мы можем отбросить условие $|z| > 1$ и установить справедливость доказанного равенства (7.5,4) для любых z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$ и произвольных $\nu \neq -1, -2, \dots$

Наконец, из соотношений (7.5,2) и (7.5,4) получаем

$$-\sin \nu \pi [e^{\pm \nu \pi i} Q_\nu(z) + e^{\mp \nu \pi i} Q_{-\nu-1}(z)] = \pi \cos \nu \pi \cdot P_\nu(-z),$$

откуда, исключая $Q_{-\nu-1}(z)$ с помощью (7.5,2), находим:

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu \pi \cdot Q_\nu(z) = P_\nu(z) e^{\mp \nu \pi i} - P_\nu(-z), \quad (7.5,5)$$

где $\nu \neq -1, -2, \dots$, z принадлежит плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$ и берется верхний или нижний знак, в зависимости от того $I(z) \geq 0$.

Полученные функциональные соотношения (7.5,1—5) играют важную роль в теории сферических функций. Из формулы (7.5,5) в частности, вытекает, что при $-1 < x < 1$

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu \pi \cdot Q_\nu(x + i0) = P_\nu(x) e^{-\nu \pi i} - P_\nu(-x),$$

$$\frac{2}{\pi} \sin \nu \pi \cdot Q_\nu(x - i0) = P_\nu(x) e^{\nu \pi i} - P_\nu(-x),$$

откуда следует

$$Q_\nu(x + i0) - Q_\nu(x - i0) = -i \pi P_\nu(x),$$

$$-1 < x < 1.$$

Полученная формула объясняет необходимость проведения разреза до точки $z = +1$ для функции Лежандра второго рода.

§ 7.6. Представление сферических функций с помощью рядов

Сферические функции Лежандра, определенные в § 7.3, являются регулярными функциями комплексного переменного z в плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$ для функций первого рода и $(-\infty, 1)$ для функций второго рода. В соответственно ограниченных областях этой плоскости сферические функции могут быть представлены гипергеометрическими рядами с различными элементами, примерами которых служат ряды (7.3,12) и (7.3,5). Простейшим методом построения всей совокупности подобных разложений является метод Барнса*), основанный на преобразовании контурных интегралов, с помощью которых определяются сферические функции, однако большинство результатов может быть получено посредством более элементарных рассуждений, опирающихся на § 7.3—5 настоящей главы. Мы начнем с вывода формул, пригодных для представления сферических функций в области $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$. Согласно

*) Барнс [1]; читатель, знакомый с теорией гипергеометрической функции, может получить формулы данного параграфа, как частный случай общих функциональных соотношений § 9.3.

(7.3,25) имеем для таких z и произвольных $\nu \neq -1, -2, \dots$

$$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + \nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1}} \times$$

$$\times F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right). \quad (7.6,1)$$

Чтобы получить соответствующее разложение для функции первого рода, предположим временно, что 2ν не является целым числом, и воспользуемся формулой (7.5,2), которую в этом случае мы можем представить в виде

$$P_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{z} [Q_\nu(z) - Q_{-\nu-1}(z)]. \quad (7.6,2)$$

Подставляя ряд (7.6,1) и воспользовавшись для преобразования отношения гамма-функций формулой (1.2,2), получаем:

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1)} (2z)^\nu F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \nu, \frac{1}{z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma\left(-\nu - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu)} (2z)^{-\nu-1} F\left(\frac{\nu}{2} + 1, \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right)$$

$$|z| > 1, \quad |\arg z| < \pi. \quad (7.6,3)$$

Условие, наложенное на параметр ν , может быть заменено более слабым условием $2\nu \neq 2p + 1$ ($p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), так как в окрестности точек $\nu = p$ обе стороны равенства (7.6,3) остаются регулярными функциями. Таким образом, формула (7.6,3) верна при любых $\nu \neq \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$

Для вывода разложений сферических функций, пригодных в той части разрезанной плоскости, где $|z| < 1$, заметим предварительно, что дифференциальное уравнение (7.3,1) переходит при подстановке $t = z^2$ в уравнение

$$t(1-t) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}t\right) \frac{du}{dt} + \frac{\nu}{2} \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) u = 0, \quad (7.6,4)$$

которое является частным случаем гипергеометрического уравнения (7.2,1), соответствующим значениям $\alpha = \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{\nu}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2}$.

Согласно результатам § 7.2, его общий интеграл при $|z| < 1$ может быть представлен в форме

$$u = AF\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + BzF\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (7.6,5)$$

где A и B — произвольные постоянные. В частности, если значения этих постоянных выбраны равными $A = P_\nu(0)$, $B = P'_\nu(0)$, то $u \equiv P_\nu(z)$, и для получения искомого разложения достаточно вычислить значения сферической функции и ее производной в точке $z=0$.

Воспользуемся с этой целью рядом (7.3,12) и положим в нем $z=0$. Мы имеем тогда

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= F\left(-\nu, \nu+1, 1, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\nu+1)_k}{(1)_k k!} \frac{1}{2^k} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu) \Gamma(1+\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(k+\nu+1)}{2^k k!^2} = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(k+\nu+1)}{2^k k!^2}, \end{aligned}$$

на основании формулы (1.2,2) теории гамма-функции.

Предположим теперь временно, что $-1 < R(\nu) < 0$. В этом случае (§ 1.5)

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+1)} &= B(k-\nu, \nu+1) = \\ &= \int_0^1 t^{k-\nu-1} (1-t)^\nu dt, \quad k=0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{2^k k! \Gamma(1+\nu)} \int_0^1 t^{k-\nu-1} (1-t)^\nu dt = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 t^{-\nu-1} (1-t)^\nu dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1)}{k! \Gamma(\nu+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \\ &= -\frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 t^{-\nu-1} (1-t)^\nu \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-\nu-1} dt. \end{aligned}$$

Законность изменения порядка интегрирования и суммирования следует из абсолютной сходимости. Полагая теперь $1-t = \sqrt{s}$, находим:

$$\begin{aligned} P_\nu(0) &= -\frac{2^\nu \sin \nu\pi}{\pi} \int_0^1 s^{\frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}} (1-s)^{-\nu-1} ds = \\ &= -2^\nu \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(-\nu) \Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)}, \end{aligned}$$

или, если воспользоваться формулами (1.2,2—3),

$$P_\nu(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}. \quad (7.6,6)$$

Так как обе части равенства (7.6,6) представляют собой целые функции ν , полученный результат справедлив для любых значений ν .

На основании (1.2,2), формула (7.6,6) может быть записана также в виде:

$$P_\nu(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} \cos \frac{\nu\pi}{2}. \quad (7.6,7)$$

Значение $P'_\nu(0)$ проще всего вычислить с помощью соотношения (7.8,5). Мы имеем:

$$P'_\nu(0) = \nu P_{\nu-1}(0) = \nu \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2},$$

откуда, принимая во внимание (1.2,1):

$$P'_\nu(0) = \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2}. \quad (7.6,8)$$

Из (7.6,5,7—8) вытекает следующее разложение для функции Лежандра первого рода, пригодное в области $|z| < 1$:

$$P_\nu(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} \cos \frac{\nu\pi}{2} \cdot F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} \sin \frac{\nu\pi}{2} z F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (7.6,9)$$

Формула (7.6,9) справедлива при любых ν .

Соответствующее разложение для функции Лежандра второго рода получается из (7.6,9) и (7.5,5). После простых преобразований мы находим:

$$Q_\nu(z) = e^{\mp \frac{\nu\pi i}{2}} \left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} z F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, z^2\right) \mp \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi}}{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) \right], \quad (7.6,10)$$

где $\nu \neq -1, -2, \dots$, $|z| < 1$ и берется верхний или нижний знак, в зависимости от того $I(z) \geq 0$.

Более интересным для приложений является соответствующее разложение для функции $Q_\nu(x)$, которое вытекает из (7.6,10) и формулы (7.3,29) и имеет вид:

$$Q_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi} \cos \frac{\nu\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right)} x F\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} + 1, \frac{3}{2}, x^2\right) - \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\pi} \sin \frac{\nu\pi}{2}}{2\Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)} F\left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right), \\ -1 < x < 1, \nu \neq -1, -2, \dots \quad (7.6,11)$$

Чтобы получить следующий важный класс разложений сферических функций, предположим сначала, что z есть вещественное число, большее, чем единица, и $R(\nu) > -1$. Полагая $z = \operatorname{ch} \alpha$ ($\alpha > 0$) и воспользовавшись интегральным представлением (7.4,9), имеем:

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^\infty \frac{d\psi}{(\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha \operatorname{ch} \psi)^{\nu+1}} = \\ = \int_0^\infty \frac{d\psi}{\left(e^\alpha \operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} - e^{-\alpha} \operatorname{sh}^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\nu+1}} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\left(1 - e^{-2\alpha} \operatorname{th}^2 \frac{\psi}{2}\right)^{\nu+1} \operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\psi}{2}} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \int_0^\infty \frac{d\psi}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\psi}{2}} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1) k!} e^{-2k\alpha} \operatorname{th}^{2k} \frac{\psi}{2} = \\ = e^{-(\nu+1)\alpha} \sum_{k=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{\Gamma(\nu+1) \cdot k!} e^{-2k\alpha} \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}^{2k} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\psi}{2}} d\psi,$$

причем доказательство законности изменения порядка суммирования и интегрирования не представляет затруднений. Полагая теперь $t = \operatorname{th}^2 \frac{\psi}{2}$, находим:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{th}^{2k} \frac{\psi}{2}}{\operatorname{ch}^{2\nu+2} \frac{\psi}{2}} d\psi = \int_0^1 t^{k-\frac{1}{2}} (1-t)^\nu dt = \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+\frac{3}{2})},$$

откуда следует

$$\begin{aligned} Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) &= e^{-(\nu+1)\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+k+1)\Gamma(k+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(k+\nu+\frac{3}{2})} e^{-2k\alpha} = \\ &= e^{-(\nu+1)\alpha} \frac{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu+1)_k (\frac{1}{2})_k}{k! (\nu+\frac{3}{2})_k} e^{-2k\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} e^{-(\nu+1)\alpha} F\left(\nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, e^{-2\alpha}\right), \quad (7.6,12)$$

или, если вернуться к переменной z :

$$\begin{aligned} Q_\nu(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} (z - \sqrt{z^2-1})^{\nu+1} \times \\ &\times F\left(\nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \{z - \sqrt{z^2-1}\}^2\right). \quad (7.6,13) \end{aligned}$$

Пусть теперь z будет комплексным числом, принадлежащим области $|\arg(z-1)| < \pi$. При этом условии выраженные $w = z - \sqrt{z^2-1}$ будет регулярной функцией z и $|w| < 1$; поэтому обе стороны (7.6,13) представляют собой регулярные функции, и эта формула, доказанная ранее для вещественных $z > 1$, остается справедливой во всей рассматри-

ваемой области. Так же легко, пользуясь принципом аналитического продолжения, освободиться от условия $R(\nu) > -1$ и заменить его единственным требованием $\nu \neq -1, -2, \dots$. Таким образом, разложение (7.6,13) справедливо для любых $\nu \neq -1, -2, \dots$ и произвольных z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, т. е. во всей области, где определена функция $Q_\nu(z)$, что придает этой формуле особо важное значение. Разложение для функции $P_\nu(z)$ получается из (7.6,13) с помощью соотношения (7.6,2). Предполагая временно 2ν не равным целому числу, находим, после несложного преобразования, основанного на равенстве (1.2,2):

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &= \frac{\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu+\frac{3}{2})} \operatorname{tg} \nu\pi (z - \sqrt{z^2-1})^{\nu+1} \times \\ &\times F\left(\nu+1, \frac{1}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \{z - \sqrt{z^2-1}\}^2\right) + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\nu)}{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)} \times \\ &\times (z - \sqrt{z^2-1})^{-\nu} F\left(-\nu, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\nu, \{z - \sqrt{z^2-1}\}^2\right), \\ &|\arg(z-1)| < \pi. \quad (7.6,14) \end{aligned}$$

Условие, наложенное на параметр ν , может быть заменено более слабым требованием $2\nu \neq 2p+1$ ($p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), так как вблизи точки $\nu=p$ обе стороны (7.6,14) остаются регулярными функциями. Поэтому формула (7.6,14) верна для всех $\nu \neq \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$ и z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$. При $\nu = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \dots$ формула приобретает неопределенный вид, и для получения соответствующего аналитического выражения для $P_\nu(z)$ необходимо выполнить предельный переход.

§ 7.7. Вронскиан системы решений уравнения Лежандра

Пусть $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — пара решений уравнения Лежандра (7.3,1), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (1-z^2) u_1' + \nu(\nu+1) u_1 &= 0, \\ \frac{d}{dz} (1-z^2) u_2' + \nu(\nu+1) u_2 &= 0. \end{aligned}$$

Обозначив через $W\{u_1(z), u_2(z)\}$ вронскиан этой пары решений (§ 5.9), получаем, умножив первое из уравнений на $u_2(z)$, второе — на $u_1(z)$ и вычитая одно из другого,

$$\frac{d}{dz}(1-z^2)W\{u_1(z), u_2(z)\} = 0,$$

откуда

$$W\{u_1(z), u_2(z)\} = \frac{C}{1-z^2}.$$

В частности, выбирая $u_1(z) = Q_\nu(z)$, $u_2(z) = Q_{-\nu-1}(z)$ и предполагая временно, что 2ν не есть целое число, имеем на основании формулы (7.6,1) при $|z| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u_1(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1}} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ u_2(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} (2z)^\nu \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ u_1'(z) &= -\frac{\sqrt{\pi} (1+\nu) \Gamma(1+\nu)}{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right) (2z)^{\nu+1} z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \\ u_2'(z) &= \frac{\sqrt{\pi} \nu \Gamma(-\nu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right)} \frac{(2z)^\nu}{z} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \end{aligned}$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} W\{u_1(z), u_2(z)\} &= \frac{\pi \Gamma(1+\nu) \Gamma(-\nu)}{2 \Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{2\nu+1}{z^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right] = \\ &= -\pi \operatorname{ctg} \nu\pi \cdot \frac{1}{z^2} \left[1 + O\left(\frac{1}{z^2}\right)\right], \end{aligned}$$

если принять во внимание формулы (1.2,1—2) теории гамма-функции. Сопоставление полученных результатов показывает, что для рассматриваемой пары решений значение постоянной будет $C = \pi \operatorname{ctg} \nu\pi$, поэтому:

$$W\{Q_\nu(z), Q_{-\nu-1}(z)\} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \nu\pi}{1-z^2}. \quad (7.7,1)$$

Доказанная формула справедлива при любых $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так как вблизи точек $\nu = n + \frac{1}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

обе стороны равенства остаются регулярными функциями. Полученный результат показывает, что $Q_\nu(z)$ и $Q_{-\nu-1}(z)$ образуют систему линейно независимых решений уравнений (7.3,1) для всех ν , не равных целому числу, за исключением полужелтых значений ν , когда вронскиан обращается в нуль и между рассматриваемыми решениями существует линейная связь (7.5,3).

Чтобы вычислить вронскиан системы решений $u_1 = P_\nu(z)$, $u_2 = Q_\nu(z)$, предположим снова, что 2ν не равно целому числу, и воспользуемся соотношением (7.6,2). Мы имеем тогда:

$$W\{P_\nu(z), Q_\nu(z)\} = \frac{\operatorname{tg} \nu\pi}{\pi} W\{Q_\nu(z), Q_{-\nu-1}(z)\} = \frac{1}{1-z^2}. \quad (7.7,2)$$

Полученный результат справедлив, согласно принципу аналитического продолжения, для любых $\nu \neq -1, -2, \dots$, поэтому функции $P_\nu(z)$, $Q_\nu(z)$ составляют систему линейно независимых решений уравнения (7.3,1) при любых значениях ν , для которых обе функции имеют определенное значение.

Аналогичным образом, с помощью соотношения (7.5,5) получаем:

$$\begin{aligned} W\{P_\nu(z), P_\nu(-z)\} &= -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} W\{P_\nu(z), Q_\nu(z)\} = \\ &= -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi} \cdot \frac{1}{1-z^2} \end{aligned} \quad (7.7,3)$$

при произвольных значениях ν . Решения линейно независимы, если ν не является целым числом.

В заключение укажем, что для интервала $-1 < x < 1$ имеет место формула

$$W\{P_\nu(x), Q_\nu(x)\} = \frac{1}{1-x^2}, \quad (7.7,4)$$

где $Q_\nu(x)$ — функция, определенная равенством (7.3,29), $\nu \neq -1, -2, \dots$

Результаты, полученные в настоящем параграфе, показывают, что общий интеграл уравнения (7.3,1) может быть представлен в одной из трех эквивалентных форм:

$$\begin{aligned} u &= AP_\nu(z) + BQ_\nu(z) = CP_\nu(z) + DP_\nu(-z) = \\ &= EQ_\nu(z) + FQ_{-\nu-1}(z), \quad |\arg(z-1)| < \pi, \end{aligned} \quad (7.7,5)$$

(A, B, \dots, F — произвольные постоянные), первая из которых пригодна при любых $\nu \neq -1, -2, \dots$, вторая — при $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и третья — при условии, что 2ν не есть целое число. Аналогичное представление возможно для вещественных $z = x$, принадлежащих интервалу $(-1, 1)$, причем в этом случае под $Q_\nu(x)$ следует понимать функцию, определенную равенством (7.3,29).

§ 7.8. Рекуррентные соотношения

Сферические функции удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, которые связывают функции с индексами, различающимися на единицу. Чтобы вывести эти соотношения, предположим временно, что переменное z есть вещественное число, большее, чем единица, и положим $z = \operatorname{ch} \alpha$, $\alpha > 0$. Мы имеем тогда, на основании интегрального представления (7.4,1):

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) + P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta \operatorname{ch} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} \operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta d\theta = 2 \operatorname{ch} \alpha P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - \\ &= \frac{4}{\pi(2\nu+1)} \int_0^\alpha \sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta} d \operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{4}{\pi(2\nu+1)} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta \cdot \operatorname{sh} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{2}{\pi(2\nu+1)} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{3}{2})\theta - \operatorname{ch}(\nu - \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= 2 \operatorname{ch} \alpha P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) - \frac{1}{2\nu+1} [P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)], \end{aligned}$$

откуда следует:

$$(\nu+1)P_{\nu+1}(z) - (2\nu+1)zP_\nu(z) + \nu P_{\nu-1}(z) = 0. \quad (7.8,1)$$

Согласно принципу аналитического продолжения, доказанное равенство справедливо для любых z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$. Далее, таким же образом находим:

$$\begin{aligned} P_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta \operatorname{sh} \theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^\alpha \operatorname{sh}(\nu + \frac{1}{2})\theta d \sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta} = \\ &= (2\nu+1) \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta} \operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta d\theta, \end{aligned}$$

откуда, если выполнить дифференцирование по α , получаем:

$$\begin{aligned} P'_{\nu+1}(\operatorname{ch} \alpha) - P'_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha) &= (2\nu+1) \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\operatorname{ch}(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} z - 2 \operatorname{ch} \theta}} d\theta = \\ &= (2\nu+1) P'_\nu(\operatorname{ch} \alpha), \end{aligned}$$

или

$$P'_{\nu+1}(z) - P'_{\nu-1}(z) = (2\nu+1) P'_\nu(z). \quad (7.8,2)$$

Результат справедлив во всей плоскости с разрезом $(-\infty, -1)$.

Остальные рекуррентные соотношения, которым удовлетворяет функция $P_\nu(z)$, могут быть выведены из формул (7.8,1) и (7.8,2). Так, например, продифференцировав (7.8,1) по z и исключив из полученного равенства $P'_{\nu-1}(z)$ или $P'_{\nu+1}(z)$ с помощью (7.8,2), приходим к соотношениям:

$$P'_{\nu+1}(z) - zP'_\nu(z) = (\nu+1)P_\nu(z), \quad (7.8,3)$$

$$zP'_\nu(z) - P'_{\nu-1}(z) = \nu P_\nu(z). \quad (7.8,4)$$

Если заменить в (7.8,3) ν на $(\nu-1)$ и исключить $P'_{\nu-1}(z)$, имеем:

$$(1-z^2)P'_\nu(z) = \nu P_{\nu-1}(z) - \nu z P_\nu(z). \quad (7.8,5)$$

Рекуррентные соотношения для функции Лежандра второго рода $Q_\nu(z)$ могут быть получены совершенно аналогичным образом, если исходить из интегрального представления (7.4,8). По своей форме они совпадают с соответствующими соотношениями для функции $P_\nu(z)$, т. е. имеют вид:

$$(\nu+1)Q_{\nu+1}(z) - (2\nu+1)zQ_\nu(z) + \nu Q_{\nu-1}(z) = 0, \quad (7.8,6)$$

$$Q'_{\nu+1}(z) - Q'_{\nu-1}(z) = (2\nu+1)Q_\nu(z), \quad (7.8,7)$$

$$Q'_{\nu+1}(z) - zQ'_\nu(z) = (\nu+1)Q_\nu(z), \quad (7.8,8)$$

$$zQ'_\nu(z) - Q'_{\nu-1}(z) = \nu Q_\nu(z), \quad (7.8,9)$$

$$(1-z^2)Q'_\nu(z) = \nu Q_{\nu-1}(z) - \nu z Q_\nu(z). \quad (7.8,10)$$

Формулы (7.8,6—10) справедливы для любых комплексных z , принадлежащих плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, и произвольных $\nu \neq -1, -2, \dots$ (*). При выводе основной пары формул (7.8,6—7) удобно временно предположить, что $z = \operatorname{ch} \alpha$ ($\alpha > 0$) и $R(\nu) > 0$, а затем распространить полученные результаты на остальные значения z и ν , пользуясь принципом аналитического продолжения. Легко видеть, что рекуррентные соотношения (7.8,6—10) остаются справедливыми также для функций $Q_\nu(x)$, определенных равенством (7.3,29).

§ 7.9. Сферические функции с целым положительным индексом. Связь с полиномами Лежандра

Важный класс сферических функций составляют сферические функции Лежандра с целым положительным значком $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), часто встречающиеся в приложениях.

Так как уравнение (7.3,1) при $\nu = n$ совпадает с уравнением (4.3,8), частным решением которого является полином Лежандра, естественно ожидать, что существует простая связь между рассматриваемым классом функций и этими полиномами. Чтобы установить эту связь, заметим предвари-

*) При $\nu \rightarrow 0$ имеем $\nu Q_{\nu-1}(z) \rightarrow 1$, $Q'_{\nu-1}(z) \rightarrow \frac{z}{1-z^2}$.

тельно, что если положить в формулах (7.3,6—7) $\nu = 0$ или $\nu = 1$, то получим $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 + 4x^2$, откуда непосредственно следует $P_0(z) = 1$ и $P_1(z) = z$. Так как рекуррентная формула для сферических функций (7.8,1) совпадает с рекуррентной формулой для полиномов Лежандра (4.3,11), этот результат показывает, что сферические функции Лежандра $P_\nu(z)$ с целым положительным значком $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) тождественны с полиномами Лежандра, рассмотренными в гл. IV.

Сферические функции второго рода $Q_\nu(z)$ с целым положительным значком $\nu = n$ также могут быть представлены в замкнутой форме через элементарные функции. Чтобы показать это, предположим временно, что z есть положительное число, большее, чем единица, и положим в (7.3,25) $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Мы получим тогда после простых вычислений:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{z^{2k}} = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}, \\ Q_1(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \cdot \frac{1}{z^{2k+2}} = \frac{z}{2} \ln \frac{z+1}{z-1} - 1, \end{aligned} \right\} \quad (7.9,1)$$

причем, по теории аналитического продолжения, доказанные формулы справедливы на всей плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$.

Соответствующие выражения для остальных функций $Q_n(z)$ могут быть выведены из этих формул с помощью рекуррентного соотношения (7.8,6). Пользуясь методом индукции, легко показать, что результат вычисления может быть представлен в форме

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \ln \frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.9,2)$$

где $P_n(z)$ — полином Лежандра, $f_{n-1}(z)$ — полином степени $(n-1)$, $f_0(z) \equiv 0$.

Формула (7.9,2) показывает, что функции Лежандра с целым положительным значком имеют логарифмические особенности в точках $z = \pm 1$. Принимая во внимание, что при $z = x \pm i0$ ($-1 < x < 1$)

$$\ln \frac{z+1}{z-1} = \ln \frac{1+x}{1-x} \mp \pi i,$$

и воспользовавшись определением функции $Q_\nu(x)$ (7.3,29), находим:

$$\left. \begin{aligned} Q_0(x) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, & Q_1(x) &= \frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1, \\ Q_n(x) &= \frac{P_n(x)}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - f_{n-1}(x), \end{aligned} \right\} \quad (7.9,3)$$

откуда, в частности, следует, что $Q_n(x) \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow \pm 1$.

§ 7.10. Сферические функции с индексом, равным половине нечетного целого числа

Другой специальный класс сферических функций, встречающийся в приложениях, образуют сферические функции с индексом $\nu = n - \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. На основании соотношений (7.5,1) и (7.5,3), сферические функции с произвольным полуцелым индексом приводятся к этим функциям. Рассматриваемый класс функций представляет интерес также с теоретической точки зрения, так как случай $\nu = n - \frac{1}{2}$ занимает особое положение в теории сферических функций и многие формулы нуждаются в модификации, когда ν принимает указанные частные значения.

В этом параграфе мы будем предполагать, что переменное z вещественно и больше, чем единица, в соответствии с чем положим $z = \operatorname{ch} \alpha$, $\alpha > 0$ *).

Общее аналитическое представление функции $Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$ дается формулой (7.6,12), которая в рассматриваемом случае принимает вид:

$$Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2})}{\Gamma(n+1)} \times \\ \times e^{-(n+\frac{1}{2})\alpha} F\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n+1, e^{-2\alpha}\right), \quad (7.10,1)$$

где $\alpha > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

* Этот случай представляет наибольший интерес для приложений (§ 8.11).

§ 7.10] функции с индексом, равным половине нечетн. числа 249

Аналогичное представление для функции $P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$ не может быть непосредственно получено из формулы (7.6,14), так как для рассматриваемых значений $\nu = n - \frac{1}{2}$ эта формула приобретает неопределенный вид. Требуемое разложение, однако, может быть выведено из соотношения (7.6,2), если перейти в последнем к пределу $\nu \rightarrow n - \frac{1}{2}$, что даст:

$$P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi^2} \left[\left\{ \frac{\partial Q_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n-\frac{1}{2}} - \left\{ \frac{\partial Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu=n-\frac{1}{2}} \right]. \quad (7.10,2)$$

Записав формулу (7.6,12) в виде

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right) \Gamma(k+1)} e^{-\alpha(2k+\nu+1)}, \quad (7.10,3)$$

находим:

$$\frac{\partial Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\nu+1) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi(k+\nu+1) - \psi\left(k+\nu+\frac{3}{2}\right) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k+\nu+1)}, \quad (7.10,4)$$

$$\frac{\partial Q_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu) \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right) \Gamma(k+1)} \times \\ \times \left\{ \psi(k-\nu) - \psi\left(k-\nu+\frac{1}{2}\right) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k-\nu)}, \quad (7.10,5)$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (§ 1.3).

При подстановке $\nu = n - \frac{1}{2}$ ($n = 1, 2, \dots$) первые n членов ряда (7.10,5) приобретают неопределенный вид, так как $\Gamma(k - n + 1) = \infty$, $\psi(k - n + 1) = \infty$ при $k = 0, 1, \dots, (n-1)$; однако, воспользовавшись соотношениями (1.2,2), (1.3,4), получаем:

$$\lim_{\nu \rightarrow n - \frac{1}{2}} \frac{\psi(k - \nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - \nu + \frac{1}{2})} = (-1)^{n-k} \Gamma(n - k),$$

$$k = 0, 1, \dots, (n-1),$$

откуда следует:

$$\left\{ \frac{\partial Q_{\nu-1}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu = n - 1/2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} \Gamma(n-k) \Gamma(k - n + \frac{1}{2})}{\Gamma(k+1)} \times$$

$$\times \Gamma(k + \frac{1}{2}) e^{-\alpha(2k - n + \frac{1}{2})} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + n + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + n + 1) \Gamma(k + 1)} \times$$

$$\times \left\{ \psi(k + \frac{1}{2}) - \psi(k + 1) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k + n + \frac{1}{2})}, \quad (7.10,6)$$

если ввести в ряде $\sum_{k=n}^{\infty} \dots$ новый значок суммирования, заменив k на $(k + n)$. При $n = 0$ первое слагаемое в (7.10,6) должно быть положено равным нулю.

Далее мы имеем непосредственно:

$$\left\{ \frac{\partial Q_{\nu}(\operatorname{ch} \alpha)}{\partial \nu} \right\}_{\nu = n - 1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + n + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + n + 1) \Gamma(k + 1)} \times$$

$$\times \left\{ \psi(k + n + \frac{1}{2}) - \psi(k + n + 1) - \alpha \right\} e^{-\alpha(2k + n + \frac{1}{2})}. \quad (7.10,7)$$

Подставляя (7.10,6—7) в (7.10,2) и замечая, что, на основании (1.2,2), $(-1)^{n-k} \Gamma(k - n + \frac{1}{2}) = \frac{\pi}{\Gamma(n + \frac{1}{2} - k)}$,

находим:

$$P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{e^{-\alpha(n-1/2)}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-k) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k+1) \Gamma(n + \frac{1}{2} - k)} e^{-2k\alpha} +$$

$$+ \frac{e^{-\alpha(n+1/2)}}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k + n + \frac{1}{2}) \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\Gamma(k + n + 1) \Gamma(k + 1)} \times$$

$$\times \left[2\alpha + \psi(k + 1) - \psi(k + \frac{1}{2}) + \psi(k + n + 1) - \right.$$

$$\left. - \psi(k + n + \frac{1}{2}) \right] e^{-2k\alpha}. \quad (7.10,8)$$

Здесь $\alpha > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и первое слагаемое должно быть опущено при $n = 0$.

Формула (7.10,8) дает искомое представление для функции $P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$. Значения логарифмической производной гамма-функции в этой формуле могут быть найдены с помощью равенств (1.3,6—9):

$$\psi(1) = \gamma, \quad \psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m},$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2, \quad \psi\left(m + \frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2 \ln 2 +$$

$$+ 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2m-1} \right), \quad (7.10,9)$$

где $\gamma = 0,5772 \dots$ — постоянная Эйлера, $m = 1, 2, \dots$

Интегральные представления для сферических функций с полуселым индексом могут быть получены из соответствующих формул § 7.4, если положить в них $\nu = n - \frac{1}{2}$. Наряду с этим существуют некоторые специальные интегральные представления, справедливые только для данного класса сферических функций, примером которых может служить формула

$$Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\sqrt{2\operatorname{ch} \alpha - 2\cos \varphi}} d\varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.10,10)$$

легко доказываемая путем разложения правой части в ряд по отрицательным степеням $\operatorname{ch} \alpha$.

В заключение укажем, что сферические функции Лежандра с полупеллым значком могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (7.10,11)$$

с модулем $0 \leq k < 1$, что представляет известный интерес, так как для этих интегралов существуют подробные таблицы*). Требуемый результат легко получается из интегральных представлений (7.4,1,8) и (7.10,10), если выполнить приведение соответствующих эллиптических интегралов к стандартной форме (7.10,11). Таким образом, мы находим:

$$P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{2}{\pi \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}} K\left(\operatorname{th} \frac{\alpha}{2}\right), \quad Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = 2e^{-\frac{\alpha}{2}} K(e^{-\alpha}) \quad (7.10,12)$$

и т. д.

§ 7.11. Асимптотические представления сферических функций при больших значениях $|\nu|$

Исследование асимптотического поведения сферических функций при фиксированном значении индекса ν и $|z| \rightarrow \infty$ представляет элементарную задачу, решение которой непосредственно получается из формул (7.6,1—3) и (7.10,8). Менее тривиальными являются асимптотические представления этих функций при фиксированном z и $|\nu| \rightarrow \infty$, играющие важную роль в различных приложениях. Мы ограничимся рассмотрением двух частных случаев, именно:

(1) z — вещественное число, большее, чем единица,

$$|\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta;$$

(2) z принадлежит интервалу $(-1,1)$, $\arg \nu = 0$.

Вывод асимптотических формул при более общих предположениях относительно z и ν читатель может найти в специальных курсах теории сферических функций, например

*) См., например, А. Флетчер [1].

в работах Гобсона, Барнса и Ватсона*), из которых последняя содержит наиболее полное исследование рассматриваемого вопроса.

В случае (1) для того, чтобы получить искомые асимптотические выражения, удобно исходить из интегральных представлений (7.4,1,8).

Запишем первую из этих формул в виде

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} \theta)^{-1/2} e^{(\nu+1/2)\theta} d\theta + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} \theta)^{-1/2} e^{-(\nu+1/2)\theta} d\theta = \\ = J_1 + J_2 \quad (7.11,1)$$

и преобразуем интеграл J_1 при помощи подстановки $t = \alpha - \theta$. Мы имеем тогда:

$$J_1 = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \int_0^\alpha \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha\right)^{-1/2} dt = \\ = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt + \int_0^\alpha \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \times \right. \\ \times \left[\left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha\right)^{-1/2} - 1 \right] dt - \int_\alpha^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt \Big\} = \\ = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{\pi (2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [J_3 + J_4 - J_5]. \quad (7.11,2)$$

Первый из интегралов в квадратных скобках может быть выражен через гамма-функцию. Мы находим (§ 1.5)

$$J_3 = 2^{1/2} \int_0^\infty e^{-(\nu+1)t} (1 - e^{-2t})^{-1/2} dt = 2^{-1/2} \mathbf{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right) = \\ = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2} + 1\right)},$$

*) См. примечание на стр. 215. Г. Ватсон [2].

откуда, если принять во внимание асимптотическое поведение гамма-функции при $|\nu| \rightarrow \infty$, $|\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ (§ 1.4), следует:

$$J_3 = \left(\frac{\pi}{\nu}\right)^{1/2} [1 + O(\nu^{-1})]. \quad (7.11,3)$$

Для оценки интеграла J_4 воспользуемся неравенством

$$|(1-x)^{-1/2} - 1| \leq x(1-a)^{-1/2}, \quad 0 \leq x \leq a < 1,$$

откуда следует

$$\left[\left(1 - \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha\right)^{-1/2} - 1 \right] \leq 2^{1/2} \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{th} \frac{t}{2} \cdot \operatorname{cth} \alpha, \quad 0 \leq t \leq \alpha,$$

поэтому:

$$|J_4| \leq O(1) \int_0^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta t^{1/2}} dt = O(1) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) (|\nu| \sin \delta)^{-3/2} = O(\nu^{-3/2}). \quad (7.11,4)$$

Наконец, мы имеем:

$$|J_5| \leq (\operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} \int_\alpha^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta} dt \leq (\alpha \operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} \int_\alpha^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta t^{1/2}} dt \leq (\alpha \operatorname{sh} \alpha)^{-1/2} \int_0^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta t^{1/2}} dt = O(\nu^{-3/2}). \quad (7.11,5)$$

Из (7.11,2—5) следует:

$$J_1 = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{(2\pi\nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [1 + O(\nu^{-1})]. \quad (7.11,6)$$

Оценка интеграла J_2 производится более простым образом. Мы находим

$$|J_2| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} \theta)^{-1/2} d\theta < < \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha (2\operatorname{ch} \alpha - 2\operatorname{ch} \theta)^{-1/2} \operatorname{ch} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2},$$

поэтому:

$$J_2 = O(1). \quad (7.11,7)$$

§ 7.11] АСИМПТОТИЧ. ПРЕДСТАВЛ. ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ $|\nu|$ 255

Из (7.11,1,6—7) следует искомое асимптотическое представление сферической функции Лежандра первого рода:

$$P_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{e^{(\nu+1/2)\alpha}}{(2\pi\nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [1 + O(\nu^{-1})], \quad (7.11,8)$$

$$|\nu| \rightarrow \infty, \quad |\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1.$$

Асимптотическое представление для функции второго рода может быть получено аналогичным образом из формулы (7.4,8). Полагая в этой формуле $\theta = \alpha + t$, имеем:

$$\begin{aligned} Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) &= \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left(1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} \frac{t}{2}\right)^{-1/2} dt = \\ &= \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{-(\nu+1/2)t}}{(\operatorname{sh} t)^{1/2}} \left[1 - \left(1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} \frac{t}{2}\right)^{-1/2}\right] dt \right\} = \\ &= \frac{e^{-(\nu+1/2)\alpha}}{(2\operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} [J_3 + J_6]. \end{aligned} \quad (7.11,9)$$

Значение интеграла J_3 было найдено выше, в (7.11,3).

Далее, на основании неравенства

$$|1 - (1+x)^{-1/2}| \leq \frac{1}{2} x, \quad x \geq 0,$$

получаем:

$$|1 - (1 + \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} t)^{-1/2}| \leq \frac{1}{2} \operatorname{cth} \alpha \cdot \operatorname{th} t, \quad t \geq 0,$$

откуда, так же как в (7.11,4):

$$|J_6| \leq O(1) \int_0^\infty e^{-t|\nu| \sin \delta t^{1/2}} dt = O(\nu^{-3/2}). \quad (7.11,10)$$

Таким образом, для функции Лежандра второго рода имеет место асимптотическое представление:

$$Q_\nu(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\pi^{1/2}}{(2\nu \operatorname{sh} \alpha)^{1/2}} e^{-(\nu+1/2)\alpha} [1 + O(\nu^{-1})], \quad (7.11,11)$$

$$|\nu| \rightarrow \infty, \quad |\arg \nu| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, \quad 0 < \alpha_0 < \alpha < \infty.$$

Асимптотические представления для функций $P_\nu(\cos \theta)$, $Q_\nu(\cos \theta)$ могут быть получены методами § 4.6. Мы находим:

$$P_\nu(\cos \theta) = \left(\frac{2}{\pi \nu \sin \theta}\right)^{1/2} \sin[(\nu + 1/2)\theta + \pi/4] \cdot [1 + O(\nu^{-1})], \quad (7.11,12)$$

$$Q_\nu(\cos \theta) = \left(\frac{\pi}{2\nu \sin \theta}\right)^{1/2} \cos[(\nu + 1/2)\theta + \pi/4] \cdot [1 + O(\nu^{-1})], \quad (7.11,13)$$

$$\nu \rightarrow \infty, \quad \delta \leq \theta \leq \pi - \delta.$$

§ 7.12. Присоединенные сферические функции

Следующий по степени сложности и значению класс сферических функций, после функций Лежандра, образуют присоединенные сферические функции, которые представляют собой решения дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2}\right]u = 0, \quad (7.12,1)$$

при произвольном ν и $m = 0, 1, 2, \dots$. Рассматриваемые функции являются обобщением сферических функций Лежандра, изученных в § 7.3—11, и переходят в эти последние при $m = 0$.

Чтобы определить присоединенные сферические функции, предположим, что z есть произвольное комплексное число, принадлежащее плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$, и введем новую функцию u , связанную с u соотношением

$$u = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} v,$$

где

$$\arg(z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} = \frac{m}{2} [\arg(z + 1) + \arg(z - 1)]$$

и

$$|\arg(z \pm 1)| < \pi.$$

Уравнение (7.12,1) принимает тогда вид:

$$(1 - z^2)v'' - 2(m + 1)zv' + (\nu - m)(\nu + m - 1)v = 0. \quad (7.12,2')$$

Легко убедиться, что если w есть какое-либо решение уравнения Лежандра

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + \nu(\nu + 1)w = 0, \quad (7.12,3)$$

то функция $v = w^{(m)}$ удовлетворяет уравнению (7.12,2), для чего достаточно проинтегрировать (7.12,3) m раз и воспользоваться для вычисления производных от произведения функций правилом Лейбница. Опираясь на последний результат, мы можем утверждать, что

$$P_\nu^{(m)}(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}, \quad Q_\nu^{(m)}(z) = (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12,4)$$

где $P_\nu(z)$ и $Q_\nu(z)$ — сферические функции Лежандра, суть решения уравнения (7.12,1).

Эти функции называются присоединенными сферическими функциями первого и второго рода.

Из определения присоединенных сферических функций следует, если принять во внимание результаты § 7.3, что $P_\nu^{(m)}(z)$ и $Q_\nu^{(m)}(z)$ представляют собой регулярные функции z в плоскости с разрезом $(-\infty, 1)$. Функция $P_\nu^{(m)}(z)$ есть целая, а функция $Q_\nu^{(m)}(z)$ — мероморфная функция индекса ν с полюсами в точках $\nu = -1, -2, \dots$

В приложениях встречается необходимость определить решение уравнения (7.12,1) при вещественных $z = x$, принадлежащих промежутку $(-1, 1)$. С этой целью заметим, что значения присоединенных сферических функций на верхнем и нижнем берегах разреза будут соответственно

$$P_\nu^{(m)}(x \pm i0) = e^{\pm \frac{m\pi i}{2}} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m},$$

$$Q_\nu^{(m)}(x \pm i0) = e^{\pm \frac{m\pi i}{2}} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x \pm i0)}{dx^m},$$

и введем две новые функции $P_\nu^m(x)$ и $Q_\nu^m(x)$, положив

$$\left. \begin{aligned} P_\nu^m(x) &= e^{\frac{m\pi i}{2}} P_\nu^m(x + i0) = e^{-\frac{m\pi i}{2}} P_\nu^m(x - i0) = \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \\ Q_\nu^m(x) &= \frac{(-1)^m}{2} \left[e^{-\frac{m\pi i}{2}} Q_\nu^m(x + i0) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\frac{m\pi i}{2}} Q_\nu^m(x - i0) \right] = \\ &= (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m}, \end{aligned} \right\} (7.12,5)$$

где $-1 < x < 1$, ν — любое (для функций второго рода $\nu \neq -1, -2, \dots$), $m = 0, 1, 2, \dots$ и $Q_\nu(x)$ обозначает функцию, определенную равенством (7.3,29).

Рассматриваемые функции называются присоединенными сферическими функциями для интервала $(-1, 1)^*$ и, как легко проверить, удовлетворяют уравнению (7.12,1) при вещественном $z = x$ ($-1 < x < 1$).

В специальном случае, когда ν есть целое положительное число ($\nu = n = 0, 1, 2, \dots$), $P_\nu(z) = P_n(z)$, где $P_n(z)$ — полином Лежандра степени n , и, согласно (4.2,1), мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_n^m(z) &= (z^2 - 1)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}} (z^2 - 1)^n, \\ m &= 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right\} (7.12,6)$$

Из (7.12,6) видно, что $P_n^m(z) \equiv 0$ при $m > n$. Для значений $m \leq n$ функция $P_n^m(z)$ представляет собой произведение $(z^2 - 1)^{m/2}$ на полином степени $(n - m)$.

* Некоторые авторы определяют присоединенные сферические функции $P_\nu^m(x)$ и $Q_\nu^m(x)$ ($-1 < x < 1$) посредством формул

$$P_\nu^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\nu(x)}{dx^m}, \quad Q_\nu^m(x) = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_\nu(x)}{dx^m},$$

отличающихся от (7.12,5) постоянным множителем $(-1)^m$, что необходимо иметь в виду при пользовании справочниками и таблицами этих функций.

Для интервала $-1 < x < 1$ формула, аналогичная (7.12,6), имеет вид:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2 - 1)^n, \quad (7.12,7)$$

Если положить в (7.12,2) $\nu = \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m}$ и умножить полученное тождество на $(z^2 - 1)^{m/2}$, то из определения функции $P_\nu^m(z)$ вытекает рекуррентная формула:

$$\left. \begin{aligned} P_\nu^{m+2}(z) + \frac{2(m+1)z}{(z^2-1)^{1/2}} P_\nu^{m+1}(z) - (\nu - m) \times \\ \times (\nu + m + 1) P_\nu^m(z) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} (7.12,8)$$

которая позволяет последовательно вычислить значения присоединенных функций по известным значениям функций с индексом $m = 0$ и $m = 1$ *).

Аналогичная формула для присоединенных функций второго рода получается из (7.12,8) заменой $P_\nu^m(z)$ на $Q_\nu^m(z)$. Рекуррентные формулы для функций $P_\nu^m(x)$ и $Q_\nu^m(x)$ ($-1 < x < 1$) являются следствием этих формул и соотношений (7.12,5). После простых вычислений находим:

$$\left. \begin{aligned} P_\nu^{m+2}(x) + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}} P_\nu^{m+1}(x) + \\ + (\nu - m)(\nu + m + 1) P_\nu^m(x) = 0, \\ Q_\nu^{m+2}(x) + \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}} Q_\nu^{m+1}(x) + \\ + (\nu - m)(\nu + m + 1) Q_\nu^m(x) = 0, \end{aligned} \right\} (7.12,9)$$

где $-1 < x < 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$, ν — любое.

Присоединенные сферические функции удовлетворяют также рекуррентным соотношениям другого типа, содержащим

* Эти значения будут:

$$\begin{aligned} P_\nu^0(z) &= P_\nu(z), \quad P_\nu^1(z) = (z^2 - 1)^{1/2} P_\nu'(z) = \\ &= \frac{\nu}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_{\nu-1}(z) - \frac{\nu z}{(z^2 - 1)^{1/2}} P_\nu(z). \end{aligned}$$

функции с одинаковым значком m и разными ν , которые представляют обобщение соответствующих формул § 7.8. Чтобы вывести эти соотношения, заметим предварительно, что если продифференцировать равенство (7.8,2) m раз по z и воспользоваться (7.12,5), то получим:

$$P_{\nu+1}^{m+1}(z) - P_{\nu-1}^{m+1}(z) = (z^2 - 1)^{1/2} (2\nu + 1) P_{\nu}^m(z). \quad (7.12,10)$$

Дифференцируя (7.8,1) m раз и исключая производные с помощью формул (7.12,4), находим:

$$(\nu + 1) P_{\nu+1}^m(z) - (2\nu + 1) z P_{\nu}^m(z) - \\ - (2\nu + 1) m (z^2 - 1)^{1/2} P_{\nu-1}^{m-1}(z) + \nu P_{\nu-1}^m(z) = 0,$$

или, принимая во внимание (7.12,10):

$$(\nu + 1 - m) P_{\nu+1}^m(z) - (2\nu + 1) z P_{\nu}^m(z) + \\ + (\nu + m) P_{\nu-1}^m(z) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12,11)$$

Равенство (7.12,11) представляет собой первое из соотношений рассматриваемого типа. При $m = 0$ оно совпадает с формулой (7.8,1). Два других рекуррентных соотношения получаются таким же образом, если после m -кратного дифференцирования равенств (7.8,2) и (7.8,3) заменить в них $\frac{d^m P_{\nu}^m(z)}{dz^m}$ на $(z^2 - 1)^{-m/2} P_{\nu}^m(z)$. Мы получим тогда:

$$\frac{dP_{\nu+1}^m(z)}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz} - \frac{mz}{z^2 - 1} [P_{\nu+1}^m(z) - P_{\nu-1}^m(z)] = \\ = (2\nu + 1) P_{\nu}^m(z), \quad (7.12,12)$$

$$\frac{dP_{\nu+1}^m(z)}{dz} - z \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} + \frac{mz}{z^2 - 1} [zP_{\nu}^m(z) - P_{\nu+1}^m(z)] = \\ = (\nu + m + 1) P_{\nu}^m(z), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.12,13)$$

Если вычесть одно из полученных равенств из другого, то находим:

$$z \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} - \frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz} - \frac{mz}{z^2 - 1} [zP_{\nu}^m(z) - P_{\nu-1}^m(z)] = \\ = (\nu - m) P_{\nu}^m(z). \quad (7.12,14)$$

При $m = 0$ формулы (7.12,12—14) переходят соответственно в формулы (7.8,2—4). Наконец, заменяя в (7.12,13) ν на $(\nu - 1)$ и исключая из полученного равенства $\frac{dP_{\nu-1}^m(z)}{dz}$ с помощью (7.12,14), получим соотношение:

$$(z^2 - 1) \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} = \nu z P_{\nu}^m(z) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(z), \\ m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12,15)$$

которое представляет собой обобщение формулы (7.8,5)*.

Рекуррентные формулы для присоединенных функций второго рода могут быть выведены совершенно аналогичным способом из соотношений (7.8,6—10). Очевидно, что эти рекуррентные формулы по своей структуре тождественны с соответствующими формулами для функций первого рода.

Рекуррентные соотношения для присоединенных функций, определенных в промежутке $-1 < x < 1$, получаются из выведенных с помощью равенств (7.12,5). Например, мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} (\nu + 1 - m) P_{\nu+1}^m(x) - (2\nu + 1) x P_{\nu}^m(x) - \\ - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(x) = 0, \\ (x^2 - 1) \frac{dP_{\nu}^m(x)}{dx} = \nu x P_{\nu}^m(x) - (\nu + m) P_{\nu-1}^m(x) = 0, \\ m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (7.12,16)$$

и т. д.

К полученным результатам близко примыкает формула, дающая выражение вронскиана системы решений $P_{\nu}^m(z)$, $Q_{\nu}^m(z)$ уравнения (7.12,1). Чтобы вывести эту формулу, продифференцируем каждое из равенств (7.12,4) по z и исключим затем производные. Мы получим тогда:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP_{\nu}^m(z)}{dz} &= \frac{1}{z^2 - 1} [(z^2 - 1)^{1/2} P_{\nu}^{m+1}(z) + mz P_{\nu}^m(z)], \\ \frac{dQ_{\nu}^m(z)}{dz} &= \frac{1}{z^2 - 1} [(z^2 - 1)^{1/2} Q_{\nu}^{m+1}(z) + mz Q_{\nu}^m(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.12,17)$$

* В монографии Гобсона [Г], стр. 280, эта формула дана в ошибочном виде.

Подставляя эти значения в вронсиан, находим:

$$W\{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}} [Q_\nu^{m+1}(z)P_\nu^m(z) - P_\nu^{m+1}(z)Q_\nu^m(z)].$$

На основании (7.12,8) имеем тождественно:

$$Q_\nu^{m+1}(z)P_\nu^m(z) - P_\nu^{m+1}(z)Q_\nu^m(z) = (m+\nu)(m-\nu-1)[Q_\nu^m(z)P_\nu^{m-1}(z) - P_\nu^m(z)Q_\nu^{m-1}(z)],$$

поэтому:

$$W\{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = (m+\nu)(m-\nu-1)W\{P_\nu^{m-1}(z), Q_\nu^{m-1}(z)\}, \quad m=1,2,\dots$$

Последовательно применяя эту формулу и воспользовавшись результатом (7.7,2), получаем:

$$W\{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{\Gamma(m+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{\Gamma(m-\nu)}{\Gamma(-\nu)} \cdot \frac{1}{1-z^2},$$

или, после преобразования (1.2,2):

$$W\{P_\nu^m(z), Q_\nu^m(z)\} = \frac{\Gamma(1+\nu+m)}{\Gamma(1+\nu-m)} \cdot \frac{(-1)^m}{1-z^2}, \quad (7.12,18)$$

где

$$|\arg(z-1)| < \pi; \quad \nu \neq -1, -2, \dots; \quad m=0,1,2,\dots$$

Формула (7.12,18) представляет собой обобщение (7.7,2) и показывает, что решения $P_\nu^m(z)$ и $Q_\nu^m(z)$ образуют пару линейно независимых интегралов уравнения (7.12,1), за исключением случая, когда ν есть целое положительное число n , меньшее, чем m^*). Кроме этого вырожденного случая, общий интеграл рассматриваемого уравнения может быть представлен в форме:

$$u = AP_\nu^m(z) + BQ_\nu^m(z). \quad (7.12,19)$$

Если воспользоваться определением присоединенных функций $P_\nu^m(x)$ и $Q_\nu^m(x)$ ($-1 < x < 1$), то из (7.12,18) вытекает:

$$\begin{aligned} W\{P_\nu^m(x), Q_\nu^m(x)\} &= \\ &= \frac{(-1)^m}{2} W\{P_\nu^m(x+i0), Q_\nu^m(x+i0)\} + \\ &+ W\{P_\nu^m(x-i0), Q_\nu^m(x-i0)\} = \\ &= \frac{\Gamma(1+\nu+m)}{\Gamma(1+\nu-m)} \cdot \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned} \quad (7.12,20)$$

*) Для $\nu=0,1,\dots,(m-1)$ обе стороны равенства (7.12,18) тождественно равны нулю.

Заметим далее, что так как дифференциальное уравнение (7.12,1) не меняется при замене ν на $(-\nu-1)$ или z на $(-z)$, то функции $P_{-\nu-1}^m(z)$, $Q_{-\nu-1}^m(z)$, $P_\nu^m(-z)$, $Q_\nu^m(-z)$ являются, наряду с $P_\nu^m(z)$ и $Q_\nu^m(z)$, интегралами рассматриваемого уравнения. Функциональные соотношения, которые в силу (7.12,19) должны существовать между этими интегралами, получаются непосредственно из соотношений § 7.5, если продифференцировать каждое из них m раз и воспользоваться (7.12,4). Мы находим тогда:

$$P_{-\nu-1}^m(z) = P_\nu^m(z), \quad (7.12,21)$$

$$\sin \nu\pi [Q_\nu^m(z) - Q_{-\nu-1}^m(z)] = \pi \cos \nu\pi \cdot P_\nu^m(z), \quad (7.12,22)$$

$$Q_\nu^m(-z) = -e^{\pm \nu\pi i} Q_\nu^m(z), \quad (7.12,23)$$

$$P_\nu^m(z)e^{\mp \nu\pi i} - P_\nu^m(-z) = \frac{2}{\pi} \sin \nu\pi \cdot Q_\nu^m(z), \quad (7.12,24)$$

где $|\arg(z-1)| < \pi$, знак \pm берется в зависимости от того, будет $I(z) \geq 0$; $m=0,1,2,\dots, \nu \neq -1, -2, \dots$

В соответственно ограниченных частях плоскости комплексного переменного, разрезанной вдоль $(-\infty, 1)$, присоединенные сферические функции могут быть представлены с помощью гипергеометрических рядов. Получение всей совокупности разложений этого вида выходит за рамки настоящей книги, и мы ограничимся лишь простейшими примерами, отсылая читателя за более подробным изложением рассматриваемого вопроса к упомянутым выше работам Гобсона и Барнса *).

Чтобы получить разложение функции $P_\nu^m(z)$, пригодное в области $|z-1| < 2$, $|\arg(z-1)| < \pi$, продифференцируем m раз ряд (7.3,12). Мы имеем при $|x| < 1$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(\alpha, \beta, \gamma, x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{k+1} (\beta)_{k+1}}{(\gamma)_{k+1} k!} x^k = \\ &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1)_k (\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!} x^k = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x), \end{aligned} \quad (7.12,25)$$

так как, по определению, $(\lambda)_{k+1} = \lambda(\lambda+1)_k$.

*) См. ссылки на стр. 228.

Последовательно применяя эту формулу, находим:

$$\frac{d^m}{dx^m} F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m} F(\alpha + m, \beta + m, \gamma + m, x),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12,26)$$

откуда следует:

$$P_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} F\left(-\nu, \nu + 1, 1, \frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \frac{(z^2 - 1)^{m/2} (-1)^m}{2^m} \cdot \frac{(-\nu)_m (\nu + 1)_m}{(1)_m} \times$$

$$\times F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1-z}{2}\right),$$

или, так как согласно (1.2,2)

$$(\nu + 1)_m = \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu + 1)},$$

$$(-\nu)_m = \frac{\Gamma(m - \nu)}{\Gamma(-\nu)} = (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)},$$

то

$$P_\nu^m(z) = \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{\Gamma(\nu - m + 1)} \times$$

$$\times \frac{(z^2 - 1)^{m/2}}{2^m \Gamma(1 + m)} F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1-z}{2}\right), \quad (7.12,27)$$

где $|z - 1| < 2$, $|\arg(z - 1)| < \pi$, ν — любое, $m = 0, 1, 2, \dots$.
Формула (7.12,27) является обобщением формулы (7.3,12) и переходит в нее при $m = 0$.

Соответствующая формула для интервала $-1 < x < 1$ получается из (7.12,27) с помощью соотношения (7.12,5) и имеет вид:

$$P_\nu^m(x) = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu + m + 1)}{2^m \Gamma(1 + m) \Gamma(\nu - m + 1)} (1 - x^2)^{m/2} \times$$

$$\times F\left(m - \nu, m + \nu + 1, m + 1, \frac{1-x}{2}\right). \quad (7.12,28)$$

Чтобы вывести формулу, дающую обобщение основного разложения функции $Q_\nu(z)$ (7.3,25), запишем последнее, воспользовавшись формулой удвоения гамма-функции (1.2,3), в виде

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + 1 + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + 1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)} z^{-(2k + \nu + 1)},$$

$$|z| < 1,$$

и продифференцируем этот ряд m раз по z .

Так как на основании (1.2,1,3)

$$\frac{d^m}{dz^m} z^{-(2k + \nu + 1)} = (-1)^m (2k + \nu + 1)(2k + \nu + 2 \dots$$

$$\dots (2k + \nu + m) z^{-(2k + \nu + m + 1)} =$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma(2k + \nu + m + 1)}{\Gamma(2k + \nu + 1)} z^{-(2k + \nu + m + 1)} =$$

$$= (-1)^m \frac{2^m \Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{\nu + 2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + 1}{2}\right)} z^{-(2k + \nu + m + 1)},$$

то

$$\frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m} = (-1)^m 2^{m-1} z^{-(\nu + m + 1)} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 2}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{\nu + m + 1}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \nu + \frac{3}{2}\right)} \frac{1}{z^{2k}} =$$

$$= (-1)^m \frac{\Gamma(\nu + m + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} z^{-(\nu + m + 1)} \times$$

$$\times F\left(\frac{\nu + m + 2}{2}, \frac{\nu + m + 1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right),$$

откуда следует

$$Q_\nu^m(z) = (-1)^m (z^2 - 1)^{m/2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + m + 1)}{2^{\nu+1} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} z^{\nu + m + 1} \times$$

$$\times F\left(\frac{\nu + m + 2}{2}, \frac{\nu + m + 1}{2}, \nu + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (7.12,29)$$

где

$$|z| > 1; \quad |\arg(z - 1)| < \pi; \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\nu \neq -1, -2, \dots$$

В заключение обзора теории присоединенных сферических функций приведем без доказательства интегральные представления *):

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{\Gamma(m+\nu+1)(z^2-1)^{m/2}}{2^m \sqrt{\pi} \Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(\nu-m+1)} \times \\ \times \int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \psi)^{\nu-m} \sin^{2m} \psi d\psi, \quad (7.12,30)$$

$$P_{\nu}^m(z) = \frac{(-1)^m \Gamma(\nu+m+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)} \times \\ \times \int_0^{\pi} (z + \sqrt{z^2-1} \cos \psi)^{\nu} \cos m\psi d\psi,$$

$$R(z) > 0; \nu \neq -1, -2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$P_{\nu}^m(\cos \beta) = \frac{2(-1)^m \Gamma(\nu+m+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+\frac{1}{2}) \Gamma(\nu-m+1)} \frac{1}{(2 \sin \beta)^m} \times \\ \times \int_0^{\beta} \frac{\cos(\nu+\frac{1}{2})\theta d\theta}{(2 \cos \theta - 2 \cos \beta)^{1/2-m}}, \quad (7.12,31)$$

$$0 < \beta < \pi, \nu - \text{любое}, m = 0, 1, 2, \dots,$$

представляющие собой обобщения соответствующих формул § 7.4.

§ 7.13. Таблицы сферических функций

За исключением таблиц полиномов Лежандра, упомянутых в § 4.26, количество опубликованных таблиц сферических функций очень ограничено, и работа по табулированию этих функций нуждается в продолжении. Наиболее подробными таблицами являются: Tables of Associated Functions,

*). См., например, [Г], стр. 241, 245 и 257.

Work Projects Administration. New York (1945), содержащие таблицы функций:

$$\begin{aligned} & (-1)^m P_n^m(\cos \theta), \theta = 0^\circ (1^\circ) 90^\circ; n = 1 (1) 10; \\ & \qquad \qquad \qquad m = 0 (1) 4, m \leq n; \quad 6 \text{ зн.}, \\ & P_n^m(x), (-1)^m Q_n^m(x), x = 1 (0,1) 10; n = 1 (1) 10; \\ & \qquad \qquad \qquad m = 0 (1) 4, m \leq n; \quad 6 \text{ зн.} \\ & P_{n+1/2}^m(x), (-1)^m Q_{n+1/2}^m(x) = 1 (0,1) 10; n = -1 (1) 4; \\ & \qquad \qquad \qquad m = 0 (1) 4; \quad 4 - 6 \text{ зн.}, \\ & i^{-n} P_n^m(ix), i^{n+2m+1} Q_n^m(ix); x = 0 (0,1) 10; \\ & \qquad \qquad \qquad n = 0 (1) 10; m = 0 (1) 4, m \leq n, \quad 6 \text{ зн.}, \end{aligned}$$

а также ряд других таблиц, относящихся к производным сферических функций и т. д.

В качестве весьма актуальной задачи по составлению таблиц сферических функций, укажем на табулирование функций $P_{-1/2+it}(\cos \theta)$, $P_{-1/2+it}(\text{ch } \alpha)$ для значений $0 \leq \theta \leq \pi$, $\alpha \geq 0$, $\tau \geq 0$, играющих важную роль при рассмотрении многих задач математической физики (§ 8.5, 8.9, 8.12, 8.13).

Упражнения

1. Получить интегральные представления для сферических функций:

$$P_{\nu}(\text{ch } \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t \text{ch } \alpha} I_{\nu}(t \text{ sh } \alpha) t^{\nu} dt,$$

$$Q_{\nu}(\text{ch } \alpha) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t \text{ch } \alpha} K_{\nu}(t \text{ sh } \alpha) t^{\nu} dt,$$

$$P_{\nu}(\cos \theta) = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t \cos \alpha} J_{\nu}(t \sin \theta) t^{\nu} dt,$$

где

$$|\nu(\alpha)| \leq \frac{\pi}{2}, R(\nu) > -1, 0 < \theta < \pi; J_{\nu}(x), I_{\nu}(x), K_{\nu}(x) -$$

— цилиндрические функции соответствующего типа.

2. Вывести интегральные представления:

$$P_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \frac{\cos \nu \pi}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} \alpha} \frac{K_{\nu}(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$|R(\nu)| < \frac{1}{2}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$Q_{\nu-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{ch} \alpha} \frac{I_{\nu}(t)}{\sqrt{t}} dt,$$

$$|R(\nu)| > -\frac{1}{2}, \quad \alpha > 0,$$

$I_{\nu}(t)$, $K_{\nu}(t)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента.

Примечание. Вывод формул, указанных в примерах 1—2, читатель может найти, например, в монографии Ватсона [1], стр. 423—424.

3. Показать, что, если ν не является целым числом, то асимптотическое поведение функции Лежандра первого рода и ее производной при $z \rightarrow -1$ дается формулами

$$P_{\nu}(z) \approx \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \ln \frac{z+1}{2}, \quad P'_{\nu}(z) \approx \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \cdot \frac{1}{1+z}.$$

Указание. Можно воспользоваться, например, разложением $P_{\nu}(z)$, приведенным на стр. 217 монографии Гобсона [1].

4. На основании результата предыдущего примера и функциональных соотношений, связывающих функции Лежандра первого и второго рода, показать, что при любом ν функция $Q_{\nu}(z)$ ($|\arg(1-z)| < \pi$) имеет логарифмическую особенность при $z=1$, а функция $Q_{\nu}(x)$ ($-1 < x < 1$) — логарифмические особенности на обоих концах рассматриваемого интервала.

5. Доказать теорему сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n \{ z z' - (z^2 - 1)^{1/2} (z'^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi \} = P_n(z) P_n(z') + 2 \sum_{m=1}^n (-1)^m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z) P_n^m(z') \cos m\varphi,$$

и аналогичную теорему для функций Лежандра:

$$P_{\nu} \{ z z' - (z^2 - 1)^{1/2} (z'^2 - 1)^{1/2} \cos \varphi \} = P_{\nu}(z) P_{\nu}(z') + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(\nu+m+1)} P_{\nu}^m(z) P_{\nu}^m(z') \cos m\varphi,$$

$$R(z) > 0, \quad R(z') > 0.$$

Доказательства этих и им подобных формул можно найти в монографии Гобсона ([Г], гл. VIII).

6. Получить асимптотические формулы для сферических функций с комплексным индексом $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$:

$$P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) \approx \frac{e^{\tau \theta}}{\sqrt{2\pi\tau \sin \theta}} \quad (0 \leq \theta \leq \pi - 0),$$

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\tau \operatorname{sh} \alpha}} \sin \left(\alpha\tau + \frac{\pi}{4} \right) \quad (0 \leq \alpha \leq a < \infty),$$

представляющие интерес в связи с задачами математической физики, рассмотренными в § 8.5, 8.9, 8.12 и 8.13.

Указание. Данные формулы могут быть получены как частный случай общих асимптотических формул, приведенных в работе Барнса [1].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VII

- Смирнов В. И. [1], Курант Р. и Гильберт Д. [1], Уиттекер и Ватсон [1], Гобсон Е. [1], [2], Барнс [1], Мак Роберт [1].
Справочники: Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1], Магнус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА VIII

ПРИЛОЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

§ 8.1. Введение

Как известно, один из наиболее важных классов задач математической физики, включающий многие проблемы электростатики, теории теплопроводности и т. д., составляют краевые задачи потенциала, заключающиеся в определении функции u , гармонической в заданной области (τ) и удовлетворяющей на ее границе (σ) одному из условий вида

$$(I) u \Big|_{\sigma} = f; \quad (II) \frac{du}{dn} \Big|_{\sigma} = f; \quad (III) \frac{du}{dn} \Big|_{\sigma} + hu \Big|_{\sigma} = f, \quad (8.1,1)$$

где f — заданная на поверхности (σ) функция точки, \mathbf{n} — внешняя нормаль к этой поверхности, h — некоторое постоянное положительное число *). В зависимости от типа граничных условий (I—III) различают первую, вторую и третью краевые задачи, известные в литературе также под названием задач Дирихле, Неймана и смешанной задачи теории потенциала.

Точная постановка рассматриваемых задач, обеспечивающая единственность решения при различных предположениях относительно вида области (τ) и свойств граничной функции f , дается в курсах математической физики **). В частности,

*) Напомним, что функция $u = u(x, y, z)$ называется гармонической в области (τ) , если она непрерывна в этой области вместе с производными первых двух порядков по (x, y, z) и удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u = 0$.

***) См., например, В. И. Смирнов [2], гл. IV, § 2; А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1], гл. IV, § 2.

задача Дирихле для ограниченной области (τ) и непрерывной функции f формулируется следующим образом:

Определить функцию u , гармоническую в области (τ) , непрерывную в замкнутой области $(\tau + \sigma)$ и совпадающую с функцией f на поверхности (σ) .

В случае неограниченной области данная формулировка должна быть дополнена условием, характеризующим поведение искомой функции на бесконечности.

Общий прием для эффективного решения краевых задач состоит в отыскании такой системы ортогональных криволинейных координат (α, β, γ) , для которой поверхность (σ) является одной из координатных поверхностей и уравнение Лапласа, после преобразования его к новым переменным по формулам

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma) \quad (8.1,2)$$

допускает разделение переменных *).

Если система координат, обладающая указанными свойствами, известна, решение краевой задачи обычно удается получить, применяя к преобразованному уравнению метод частных решений.

Настоящая глава посвящена рассмотрению гармонических краевых задач математической физики, разрешимых с помощью описанного метода и связанных с использованием аппарата сферических функций. В заключительной части главы (§ 8.14) приведены некоторые примеры аналогичных задач, относящихся к уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$.

*) Вычисления, связанные с этим преобразованием, упрощаются, если воспользоваться формулой

$$\Delta u = \frac{1}{H_x H_y H_z} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{H_y H_z}{H_x} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{H_x H_z}{H_y} \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{H_x H_y}{H_z} \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right) \right\},$$

где H_x, H_y, H_z — коэффициенты Ламе системы (8.1,2), входящие в выражение квадрата линейного элемента

$$ds^2 = H_x^2 d\alpha^2 + H_y^2 d\beta^2 + H_z^2 d\gamma^2.$$

§ 8.2. Разделение переменных в уравнении Лапласа в сферической системе координат

К числу наиболее важных ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных, принадлежит система сферических координат (r, θ, φ) , связанных с прямоугольными координатами (x, y, z) соотношениями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (8.2,1)$$

где

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Координатные поверхности в рассматриваемой системе координат суть сферы $r = \text{const}$, круговые конусы $\theta = \text{const}$ и плоскости $\varphi = \text{const}$, проходящие через ось z . Квадрат линейного элемента в сферической системе координат имеет вид:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2; \quad (8.2,2)$$

поэтому значения коэффициентов Ламе будут $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r \sin \theta$, и уравнение Лапласа приобретает следующую форму:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.2,3)$$

Легко показать, что, если искать частные решения последнего уравнения вида

$$u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad (8.2,4)$$

то переменные могут быть разделены, и определение каждого из множителей приводится к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения. Действительно, умножая (8.2,3) на $r^2 \sin^2 \theta$ и отделяя переменную φ , мы получим, после подстановки (8.2,4) и деления на произведение $R\Theta\Phi$,

$$\left\{ \frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right\} \sin^2 \theta = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2},$$

что возможно лишь при условии, что обе стороны равенства равны одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через μ^2 , находим:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.2,5)$$

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} = \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}.$$

В свою очередь, последнее равенство выполнено только в том случае, если его стороны равны постоянной, которую удобно обозначить через $\nu(\nu+1)$. Мы получим тогда:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (8.2,6)$$

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dR}{dr} - \nu(\nu+1) R = 0. \quad (8.2,7)$$

Таким образом, определение множителей в (8.2,4) сводится к относительно простой задаче интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (8.2,5—7). Полученная этим способом совокупность частных решений уравнения Лапласа вида (8.2,4), зависящих от двух, вообще говоря, комплексных параметров μ и ν^* , может быть использована для решения краевых задач математической физики в случае, если область есть шар, конус и т. д.

Выбор значений параметров μ и ν и соответствующих им решений уравнений (8.2,5—7) должен быть произведен таким образом, чтобы каждое из частных решений (8.2,4) представляло собой гармоническую в рассматриваемой области функцию и решение краевой задачи могло быть получено путем суперпозиции найденных частных решений.

§ 8.3. Применение метода частных решений к краевой задаче для сферической области

В качестве простого примера приложения данного метода рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для сферы. Чтобы избежать излишних усложнений, ограничимся случаем симметрии

* Не ограничивая общности, можно считать, что $R(\mu) \geq 0$ и $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$, так как замена μ на $(-\mu)$ или ν на $(-\nu-1)$ не меняет значений постоянных разделения μ^2 и $\nu(\nu+1)$.

вращения, когда значения граничной функции f и искомой функции u не зависят от угла φ .

Предполагая, что начало координат выбрано в центре сферы и ось z совпадает с осью симметрии, мы можем сформулировать рассматриваемую задачу следующим образом:

Найти функцию $u = u(r, \theta)$, гармоническую в области $r < a$ (a — радиус сферы), непрерывную в замкнутой области $r \leq a$ и удовлетворяющую условию $u|_{r=a} = f(\theta)$, где $f(\theta)$ — заданная функция, непрерывная в замкнутом промежутке $0 \leq \theta \leq \pi$). В случае симметрии вращения множитель Φ в (8.2,4) надлежит выбрать равным единице, в соответствии с чем следует принять $\mu = 0$. Уравнение (8.2,6) переходит при этом в уравнение для сферических функций Лежандра (7.3,1) от аргумента $x = \cos \theta$. Общий интеграл последнего уравнения для произвольных ν , принадлежащих области $R(\nu) > -1$ **, может быть записан в виде

$$\Theta = AP_\nu(\cos \theta) + BQ_\nu(\cos \theta), \quad (8.3,1)$$

где $P_\nu(x)$, $Q_\nu(x)$ — сферические функции первого и второго рода.

Так как переменное $x = \cos \theta$ изменяется в замкнутом промежутке $(-1, 1)$, а $Q_\nu(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 1$, в то время как $P_\nu(x)$ остается конечным***), то для того, чтобы получить решение, ограниченное внутри сферы, необходимо прежде всего положить $B = 0$. Далее, так как при всяком ν , отличном от целого положительного числа, $P_\nu(x) \rightarrow \infty$, когда $x \rightarrow -1$, из тех же соображений следует принять $\nu = n$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, единственные решения уравнения (8.2,6) при $\mu = 0$, остающиеся ограниченными в замкнутом промежутке $0 \leq \theta \leq \pi$, соответствуют целым положительным значениям параметра ν и имеют вид

$$\Theta = AP_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3,2)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра порядка n .

*) В случае, если f имеет разрывы, формулировка задачи должна быть соответствующим образом изменена.

***) Напомним, что нас интересует только область $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$.

****) См. (7.3,13), а также примеры 3—4 упражнений к гл. VII.

Уравнение (8.2,7) представляет собой уравнение Эйлера, и его общий интеграл при $\nu \neq -\frac{1}{2}$ будет:

$$R = Cr^\nu + Dr^{-\nu-1}. \quad (8.3,3)$$

В рассматриваемом случае $\nu = n$, и из требования конечности решения в центре сферы вытекает, что надлежит выбрать $D = 0$; поэтому

$$R = Cr^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.3,4)$$

Таким образом, мы получаем следующую совокупность частных решений уравнения Лапласа:

$$u = u_n = M_n r^n P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.3,5)$$

каждое из которых представляет гармоническую функцию внутри сферы $r \leq a$. Построенная совокупность позволяет дать решение задачи, поставленной в начале данного параграфа. Действительно, предположим, что функция $f(\theta)$ может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра (§ 4.7):

$$\left. \begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \\ f_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \end{aligned} \right\} \quad (8.3,6)$$

и ряд сходится равномерно в замкнутом промежутке $(0, \pi)$. Тогда, выбирая $M_n = f_n a^{-n}$ и суммируя решения (8.3,5), мы получим ряд:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{r}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (8.3,7)$$

который, на основании известной теоремы о последовательностях гармонических функций*), сходится равномерно в замкнутой области $r \leq a$ и представляет собой гармоническую в этой области функцию, принимающую краевое значение $f(\theta)$ при $r \rightarrow a$. Таким образом, формула (8.3,7) дает решение задачи Дирихле для сферы. Следует заметить, что

*) См., например, В. И. Смирнов [2], стр. 604.

окончательный результат остается справедливым также в том случае, когда $f(\theta)$ — кусочно-гладкая функция в интервале $(0, \pi)$ и условие равномерной сходимости нарушается в отдельных точках промежутка.

Решение других краевых задач для сферы, соответствующих условиям вида (8.1, II—III), получается из (8.3, 5) совершенно аналогичным образом.

Исследование общего случая, когда f зависит от двух переменных, $f = f(\theta, \varphi)$, может быть проведено сходными методами, причем подходящая совокупность частных решений уравнения Лапласа, гармонических внутри сферы, имеет в этом случае вид*):

$$u = u_{m,n} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] r^n P_n^m(\cos \theta), \quad (8.3, 8)$$

где $P_n^m(x)$ — присоединенная функция Лежандра, $n = 0, 1, 2, \dots$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$.

Если заменить в (8.3, 5) и (8.3, 8) множитель r^n линейной комбинацией $(Cr^n + Dr^{-n-1})$, то полученные системы могут быть использованы при решении краевых задач для сферического слоя и области, внешней к сфере, причем в последнем случае надлежит положить $C = 0$.

§ 8.4. Пример из электростатики. Поле точечного заряда, помещенного внутри полой проводящей сферы

В виде примера, взятого из области математической физики, дадим решение задачи электростатики об определении поля точечного заряда q , помещенного внутри полой проводящей сферы радиуса a на расстоянии b от ее центра. Выберем начало координат в центре сферы и направим ось z через точку A , в которой находится заряд. Чтобы устранить особенность в точке A , представим потенциал электростатического поля φ в виде суммы потенциала источника и потенциала вторичного поля u , созданного зарядами, индуцированными на внутренней поверхности сферы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + u, \quad (8.4, 1)$$

где $\rho = |AM| = \sqrt{r^2 + b^2 - 2rb \cos \theta}$ — расстояние от точки A

*) См., например, В. И. Левин и Ю. И. Гросберг [1], § 29.

до произвольной точки $M(r, \theta)$. Если считать потенциал сферы $\varphi|_{r=a} = 0$, то определение функции $u = u(r, \theta)$ приводится к решению рассмотренной выше задачи Дирихле при граничном условии:

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}} = f(\theta). \quad (8.4, 2)$$

Правая часть последнего равенства может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра, для чего в данном случае нет необходимости прибегать к вычислению интегралов (8.3, 6), но достаточно воспользоваться формулой (4.2, 3), которая непосредственно дает

$$u|_{r=a} = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (8.4, 3)$$

причем из оценки (4.4, 2) и неравенства $b < a$ следует, что сходимость ряда равномерна в замкнутом промежутке $(0, \pi)$. Согласно § 8.3, значение функции u может быть представлено формулой:

$$u = -\frac{q}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{br}{a^2}\right)^n P_n(\cos \theta). \quad (8.4, 4)$$

Ряд (8.4, 4) легко суммируется при помощи равенства (4.2, 3), и мы находим:

$$u = -\frac{q}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2\left(\frac{br}{a^2}\right) \cos \theta + \left(\frac{br}{a^2}\right)^2}} = \frac{q'}{\rho'}, \quad (8.4, 5)$$

где положено

$$q' = -q \left(\frac{a}{b}\right), \quad b' = \frac{a^2}{b} \quad \text{и} \quad \rho' = \sqrt{r^2 + b'^2 - 2rb' \cos \theta}^*).$$

Таким образом, искомый потенциал может быть представлен в виде суммы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + \frac{q'}{\rho'}, \quad (8.4, 6)$$

где первое слагаемое есть потенциал заряда q в отсутствие сферы, второе — потенциал отраженного заряда q' , учитывающего влияние этой сферы.

*) Если A' — отображение точки A в сфере, то $\rho' = |A'M|$.

§ 8.5. Применение метода частных решений к краевой задаче для конической области

Следующий вид области, для которой краевая задача может быть решена с помощью разделения переменных в сферической системе координат, есть область, ограниченная поверхностью бесконечного кругового конуса. Если поместить начало координат в вершине конуса и направить ось z по его оси симметрии, то уравнение поверхности конуса будет $\theta = \theta_0$, и задача Дирихле для случая симметрии вращения формулируется следующим образом:

Найти функцию $u = u(r, \theta)$, гармоническую в открытой области $0 < r < \infty, 0 \leq \theta < \theta_0$, непрерывную в области $0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq \theta_0$, удовлетворяющую граничному условию $u|_{\theta=\theta_0} = f(r)$ и условию на бесконечности: $u|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, равномерно относительно θ *). Функция $f(r)$ предполагается непрерывной при $0 \leq r < \infty$ и $f(\infty) = 0$.

При применении к рассматриваемой проблеме метода разделения переменных, для ограниченности решений на оси конуса необходимо, так же как в § 8,3, положить в (8.3,1) $B = 0$, однако в данном случае нет более оснований считать ν целым положительным числом, так как $P_\nu(\cos \theta)$ при $0 \leq \theta \leq \theta_0$ ограничено при любых ν .

Мы покажем, что решение поставленной задачи при некоторых добавочных ограничениях, наложенных на функцию $f(r)$, может быть получено, если выбрать $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$, $\tau > 0$, чему соответствует следующая совокупность частных решений уравнения Лапласа, непрерывно зависящих от параметра τ :

$$u = u_\tau = [M_\tau \cos \tau \ln r + N_\tau \sin \tau \ln r] r^{-1/2} P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta), \quad (8.5,1)$$

где M_τ и N_τ — произвольные непрерывные функции, $\tau \geq 0$. Сферические функции с комплексным значком, входящие в рассматриваемую совокупность, определяются аналитически

*) Последнее условие необходимо для гарантии единственности решения. См., например, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [1], гл. IV, стр. 292.

с помощью разложения (7.3,12), которое в данном случае принимает вид:

$$P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) = F\left(\frac{1}{2} + i\tau, \frac{1}{2} - i\tau, 1, \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) = \\ = 1 + \frac{\frac{1}{4} + \tau^2}{1^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \tau^2\right)\left(\frac{9}{4} + \tau^2\right)}{2!^2} \sin^4 \frac{\theta}{2} + \dots \quad (8.5,2)$$

Из формулы (8.5,2) следует, что функции $P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)$ вещественны и при $0 \leq \theta \leq \theta_0$ удовлетворяют неравенствам:

$$1 \leq P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta) \leq P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0), \quad (8.5,3)$$

первое из которых справедливо во всем интервале $(0, \pi)$.

Предположим, что $f(r)$ такова, что функция $F(r) = r^{1/2} f(r)$ может быть представлена интегралом Фурье *)

$$\left. \begin{aligned} F(r) = r^{1/2} f(r) &= \int_0^\infty [F_c(\tau) \cos \tau \ln r + \\ &+ F_s(\tau) \sin \tau \ln r] \cdot d\tau, \quad 0 < r < \infty, \\ F_c(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(r) r^{-1/2} \cos \tau \ln r \cdot dr, \\ F_s(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty f(r) r^{-1/2} \sin \tau \ln r \cdot dr, \end{aligned} \right\} \quad (8.5,4)$$

причем интеграл сходится равномерно в промежутке $0 < \delta \leq r \leq A < \infty$.

*) Интегральное разложение (8.5,4), приводящееся к стандартной форме интеграла Фурье при помощи подстановки $\ln r = \xi$ ($-\infty < \xi < \infty$), справедливо, если $f(r)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию во всяком промежутке $0 < a \leq r \leq b < \infty$, и интеграл

$$\int_0^\infty |f(r)| r^{-1/2} dr$$

существует.

Выбирая в (8.5,1)

$$M_\tau = \frac{F_c(\tau)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta_0)}, \quad N_\tau = \frac{F_s(\tau)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta_0)}$$

и интегрируя по параметру τ по промежутку $(0, \infty)$, мы получим функцию:

$$u = r^{-1/2} \int_0^\infty [F_c(\tau) \cos \tau \ln r + F_s(\tau) \sin \tau \ln r] \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos\theta_0)} d\tau, \quad (8.5,5)$$

которая, по крайней мере формально, дает решение поставленной задачи.

В качестве примера рассмотрим задачу электростатики об определении поля точечного заряда q , помещенного на оси полого проводящего конуса на расстоянии a от его вершины. Представив искомый потенциал φ в виде суммы

$$\varphi = \frac{q}{\rho} + u, \quad (8.5,6)$$

где $\rho = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta}$, и предполагая потенциал на поверхности конуса равным нулю, мы сведем задачу к частному случаю рассмотренной проблемы, соответствующему граничному условию:

$$u|_{\theta=\theta_0} = f(r) = -\frac{q}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}}. \quad (8.5,7)$$

Воспользовавшись интегральным представлением (7.4,6), находим:

$$\begin{aligned} F_c(\tau) &= -\frac{q}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \tau \ln r}{\sqrt{r} \cdot \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta_0}} dr = \\ &= -\frac{q}{\pi \sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{\cos \tau \ln r}{\sqrt{\frac{r}{a} + \frac{a}{r} - 2 \cos \theta_0}} \frac{dr}{r} = \\ &= -\frac{q}{\pi \sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos \tau (s + \ln a)}{\sqrt{2 \operatorname{ch} s - 2 \cos \theta_0}} ds = \\ &= -\frac{2q \cos \tau \ln a}{\pi \sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{\cos \tau s}{\sqrt{2 \operatorname{ch} s - 2 \cos \theta_0}} ds = \\ &= -\frac{q}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\cos \tau \ln a}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0). \end{aligned} \quad (8.5,8)$$

Такая же формула, с заменой косинуса на синус, получается для $F_s(\tau)$, и решение задачи дается интегралом:

$$u = -\frac{q}{\sqrt{ar}} \int_0^\infty \frac{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta)}{P_{-1/2+i\tau}(\cos \theta_0)} P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0) \cdot \frac{\cos \tau \ln \frac{r}{a}}{\operatorname{ch} \pi \tau} d\tau. \quad (8.5,9)$$

Нетрудно видеть, что полученный интеграл сходится абсолютно и равномерно в области $0 < \delta \leq r \leq A < \infty$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$.

Действительно, из неравенств (8.5,3) следует, что рассматриваемый интеграл мажорируется интегралом

$$\int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta_0) \frac{d\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau},$$

который сходится к $\frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{\theta_0}{2}$. Опираясь на этот результат, можно доказать, что формула (8.5,9) действительно дает решение поставленной задачи*).

§ 8.6. Разделение переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах

Из других систем ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных и частные решения выражаются через сферические функции, в первую очередь должны быть упомянуты две системы вырожденных эллипсоидальных координат, пригодные для обсуждения краевых задач для области, имеющей вид вытянутого или сплюснутого эллипсоидов вращения**).

*) При рассмотрении сходимости интегралов, содержащих сферические функции с комплексным значком $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$, полезно иметь в виду асимптотические формулы, указанные в примере 6 упражнений гл. VII.

**) В литературе эти системы координат иногда называются сфероидальными.

По поводу эллипсоидальных координат см. Е. В. Гобсон, [1], гл. XI.

Система вырожденных эллипсоидальных координат (α, β, φ) для вытянутого эллипсоида вращения определяется при помощи формул

$$\begin{aligned} x &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \cos \varphi, & y &= c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z &= c \operatorname{ch} \alpha \cos \beta, \end{aligned} \quad (8.6,1)$$

где c — масштабный множитель, $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$ *). Каждой точке пространства соответствует единственная совокупность значений (α, β, φ) . Координатные

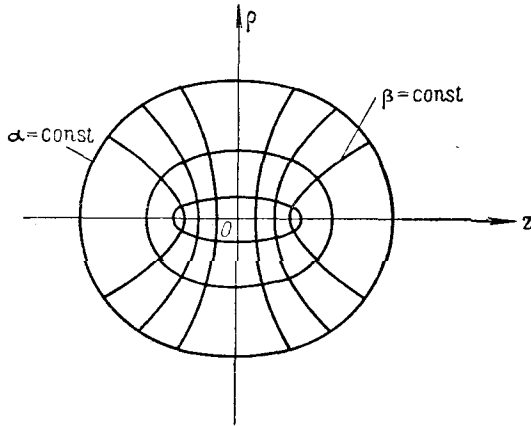


Рис. 23.

поверхности суть вытянутые эллипсоиды вращения $\alpha = \text{const}$ с фокусами в точках $(0, 0, \pm c)$, софокусные им двуполостные гиперboloиды вращения $\beta = \text{const}$ и плоскости, проходящие через ось z , $\varphi = \text{const}$ (рис. 23). Простое вычисление дает для квадрата линейного элемента выражение

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2, \quad (8.6,2)$$

откуда для коэффициентов Ламе получаются значения:

$$H_\alpha = H_\beta = c (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{\frac{1}{2}}, \quad H_\varphi = c \operatorname{sh} \alpha \sin \beta,$$

*) Если (ρ, z, φ) — цилиндрические координаты точки, то $z + i\rho = c \operatorname{ch}(\alpha + i\beta)$.

и уравнение Лапласа принимает вид:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{sh}^2 \alpha + \sin^2 \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right] = 0. \quad (8.6,3)$$

Если искать частные решения последнего уравнения

$$u = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.6,4)$$

то, так же как в § 8.2, переменные разделяются, и для определения множителей получаются обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.6,5)$$

$$\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{d}{d\beta} \left(\sin \beta \frac{dB}{d\beta} \right) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \beta} \right] B = 0, \quad (8.6,6)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \left[\nu(\nu + 1) + \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right] A = 0, \quad (8.6,7)$$

где μ и ν — параметры разделения, выбор которых и соответствующих интегралов рассматриваемых уравнений диктуется конкретными условиями задачи. В частности, для случая симметрии вращения, когда искомая функция u не зависит от координаты φ , следует положить $\mu = 0$, $\Phi = 1$; в более общем случае, когда u должно быть периодической функцией φ , параметр μ принимает целые положительные значения $\mu = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) и т. д.

Вырожденные эллипсоидальные координаты для сплюснутого эллипсоида вращения определяются равенствами *):

$$\left. \begin{aligned} x &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \cos \varphi, & y &= c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta \sin \varphi, \\ z &= c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta, & 0 &\leq \alpha < \infty, & 0 &\leq \beta \leq \pi, \\ & & & & & -\pi < \varphi \leq \pi. \end{aligned} \right\} \quad (8.6,8)$$

Координатные поверхности суть сплюснутые эллипсоиды вращения $\alpha = \text{const}$, однополостные гиперboloиды вращения $\beta = \text{const}$ и плоскости $\varphi = \text{const}$ (рис. 24).

*) С цилиндрическими координатами (ρ, z, φ) рассматриваемые криволинейные координаты связаны соотношением: $z + i\rho = c \operatorname{sh}(\alpha + i\beta)$.

Квадрат линейного элемента и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат имеют вид:

$$ds^2 = c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta) (d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2 \operatorname{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta d\varphi^2, \quad (8.6,9)$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{ch} \alpha \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sin \beta \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \left(\frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (8.6,10)$$

Разделяя переменные, получаем для определения множи-

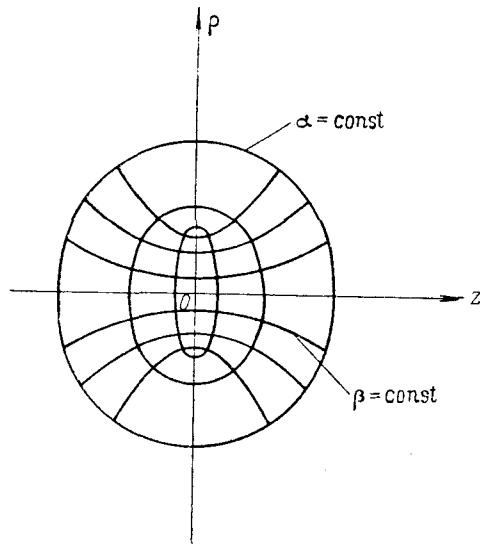


Рис. 24.

телей в решении (8.6,4), вместо (8.6,5—7), следующую систему уравнений:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.6,11)$$

$$\frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{d}{d\beta} \left(\sin \beta \frac{dB}{d\beta} \right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \beta} \right] B = 0, \quad (8.6,12)$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\operatorname{ch} \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) - \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\operatorname{ch}^2 \alpha} \right] A = 0. \quad (8.6,13)$$

§ 8.7. Краевые задачи для эллипсоидов вращения

Найденные в § 8.6 частные решения уравнения Лапласа могут быть использованы для построения совокупностей функций, гармонических внутри или вне эллипсоида вращения, что дает возможность получить решение ряда краевых задач математической физики, относящихся к областям этого вида.

Рассмотрим в качестве примера краевые задачи, связанные с вытянутым эллипсоидом вращения, и ограничимся для простоты случаем, когда искомая функция u не зависит от угла φ . Как уже указывалось, в этом случае $\mu = 0$, и уравнение (8.6,6) переходит в уравнение для сферических функций Лежандра от аргумента $x = \cos \beta$, единственными решениями которого, ограниченными в замкнутом интервале $(0, \pi)$, являются решения, соответствующие целым положительным значениям параметра ν , $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)*,

$$B = CP_n(\cos \beta), \quad (8.7,1)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра n -го порядка (§ 8.3).

Уравнение (8.6,7) при помощи подстановки $\beta = i\alpha$ переходит в уравнение (8.6,6); поэтому его общий интеграл при $\mu = 0$, $\nu = n$ будет:

$$A = MP_n(\operatorname{ch} \alpha) + NQ_n(\operatorname{ch} \alpha). \quad (8.7,2)$$

Если $\alpha = \alpha_0$ есть уравнение поверхности эллипсоида, на которой заданы краевые условия, то области, лежащей внутри эллипсоида, соответствует совокупность значений $0 \leq \alpha < \alpha_0$, области вне эллипсоида — совокупность $\alpha_0 < \alpha < \infty$. Так как при $\alpha \rightarrow 0$ $P_n(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow 1$, $Q_n(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow \infty$ (7.3,13 и 26), то для внутренней задачи надлежит положить $N = 0$. Таким образом, подходящая для рассмотрения внутренней задачи совокупность частных решений уравнения Лапласа, каждое из которых представляет собой гармоническую внутри эллипсоида функцию, будет:

$$u = u_n = M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7,3)$$

Для внешней задачи требуется получить решения, гармонические вне эллипсоида и исчезающие на бесконечности,

* Это замечание относится как к внутренней, так и к внешней задачам для рассматриваемого эллипсоида.

что, ввиду (7.6,13—14), приводит к необходимости положить $M \equiv 0$; поэтому пригодная для этого случая совокупность частных решений (8.6,3) имеет вид:

$$u = u_n = N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7,4)$$

Отличие случая сплюснутого эллипсоида вращения от рассмотренного состоит только в том, что уравнение (8.6,7) заменяется уравнением (8.6,13), поэтому для ν получаем его прежнее значение $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), и множитель, зависящий от β , как и раньше, дается формулой (8.7,1).

Уравнение (8.6,13) при подстановке $\beta = \frac{\pi}{2} - i\alpha$ преобразуется в уравнение (8.6,12), поэтому его общий интеграл для случая $\mu = 0$, $\nu = n$ имеет вид:

$$A = M P_n(i \operatorname{sh} \alpha) + N Q_n(i \operatorname{sh} \alpha), \quad (8.7,5)$$

откуда следует, что частными решениями уравнения Лапласа будут функции:

$$u = u_n = [M_n P_n(i \operatorname{sh} \alpha) + N_n Q_n(i \operatorname{sh} \alpha)] P_n(\cos \beta). \quad (8.7,6)$$

Покажем, что для того, чтобы полученные решения были гармоническими функциями внутри эллипсоида $\alpha = \alpha_0$, необходимо положить $N_n = 0$. Доказательство является менее тривиальным, чем в аналогичном случае для вытянутого эллипсоида вращения, так как в рассматриваемом случае оба решения $P_n(i \operatorname{sh} \alpha)$ и $Q_n(i \operatorname{sh} \alpha)$ остаются ограниченными при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$, и для получения требуемого результата необходимо исследовать поведение $\operatorname{grad} u$ вблизи особой линии преобразования (8.6,8) $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

В основе рассуждения лежит формула

$$(\operatorname{grad} u)^2 = \frac{1}{c^2 (\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 \right], \quad (8.7,7)$$

следующая из (8.6,9), если считать, что u не зависит от угла φ . На рассматриваемой линии знаменатель правой части обращается в нуль, поэтому для конечности $\operatorname{grad} u$ необходимо, чтобы выражение в квадратных скобках также обращалось в нуль, когда $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Вычисляя предел этого выражения один раз в предположении, что переменная β

сохраняет постоянное значение $\beta = \frac{\pi}{2}$, а переменная $\alpha \rightarrow 0$, а другой раз при условии, что $\alpha = 0$ и $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$, получаем, в качестве необходимого условия, равенство

$$N_n P_n(0) Q_n'(0) = N_n P_n'(0) Q_n(0) = 0,$$

откуда, на основании формул (7.6,6,8,10), следует $N_n = 0$. Полученное условие является достаточным для ограниченности $\operatorname{grad} u$. Действительно, если

$$u = u_n = M_n P_n(i \operatorname{sh} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.7,8)$$

то

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \right)^2 = M_n^2 \{ P_n^2(i \operatorname{sh} \alpha) P_n^2(\cos \beta) \sin^2 \beta - P_n^2(i \operatorname{sh} \alpha) P_n^2(\cos \beta) \operatorname{ch}^2 \alpha \}.$$

Выражение в скобках есть полином относительно $\cos \beta$, обращающийся в нуль при $\cos \beta = \pm i \operatorname{sh} \alpha$, следовательно, этот полином делится на $(\operatorname{ch}^2 \alpha - \sin^2 \beta)$, и линия $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$ не будет особой для $\operatorname{grad} u$. Таким образом, формула (8.7,8) дает совокупность решений уравнения Лапласа, пригодных для рассмотрения внутренних краевых задач для сплюснутого эллипсоида вращения. Для внешней задачи, как и раньше, надлежит положить $M_n = 0$, и соответствующая совокупность имеет вид:

$$u = u_n = N_n Q_n(i \operatorname{sh} \alpha) P_n(\cos \beta), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.7,9)$$

Найденные совокупности частных решений уравнения Лапласа (8.7,3—4) и (8.7,8—9) позволяют рассмотреть ряд краевых задач, относящихся к эллипсоидам вращения. Пусть, например, требуется решить внутреннюю задачу Дирихле для вытянутого эллипсоида вращения. Предположим, что граничная функция $f = f(\beta)$ может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра

$$\left. \begin{aligned} f(\beta) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(\cos \beta) \quad (0 \leq \beta \leq \pi), \\ f_n &= \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} f(\beta) \sin \beta P_n(\cos \beta) d\beta, \end{aligned} \right\} \quad (8.7,10)$$

равномерно сходящийся в замкнутом промежутке $(0, \pi)$. Тогда ряд

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{P_n(\operatorname{ch} \alpha)}{P_n(\operatorname{ch} \alpha_0)} P_n(\cos \beta), \quad (8.7,11)$$

составленный из членов вида (8.7,3), как легко показать, пользуясь теоремой о последовательностях гармонических функций*), дает решение поставленной задачи.

Пример конкретной задачи математической физики рассмотрен в § 8.8.

Для общего случая, когда граничные значения искомой функции зависят от двух координат, $f = f(\beta, \varphi)$, подходящими совокупностями частных решений уравнения Лапласа для вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения являются:

$$u = u_{mn} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] P_n^m(\cos \beta) \frac{P_n^m(\operatorname{ch} \alpha)}{Q_n^m(\operatorname{ch} \alpha)}, \quad (8.7,12)$$

$$u = u_{mn} = [M_{mn} \cos m\varphi + N_{mn} \sin m\varphi] P_n^m(\cos \beta) \frac{P_n^m(i \operatorname{sh} \alpha)}{Q_n^m(i \operatorname{sh} \alpha)}, \quad (8.7,13)$$

$n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n,$

причем в обоих случаях верхняя строчка относится к внутренней, нижняя — к внешней краевой задаче.

§ 8.8. Пример из математической физики. Притяжение вытянутого однородного эллипсоида

В качестве простого примера приложения результатов § 8.6—7, вычислим ньютонов потенциал вытянутого однородного эллипсоида вращения массы M . Если обозначить φ_i и φ_e потенциалы внутри и вне рассматриваемого эллипсоида, то, как известно, рассматриваемая задача сводится к отысканию решений уравнений

$$\Delta \varphi_i = -4\pi\rho, \quad \Delta \varphi_e = 0, \quad (8.8,1)$$

*) См. примечание на стр. 275.

регулярных в соответствующих областях и удовлетворяющих условиям:

$$\varphi_i = \varphi_e \Big|_{\sigma}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial n} \Big|_{\sigma}, \quad \varphi_e \Big|_{\infty} = 0, \quad (8.8,2)$$

где (σ) — поверхность эллипсоида, n — нормаль к этой поверхности, ρ — плотность вещества эллипсоида. Решение задачи можно привести к определению двух гармонических функций, если представить φ_i в виде суммы

$$\varphi_i = \varphi_0 + \varphi^*, \quad (8.8,3)$$

где φ^* — гармоническая внутри эллипсоида функция, φ_0 — какое-либо частное решение уравнения Пуассона, в качестве которого удобно выбрать:

$$\varphi_0 = -\pi\rho(x^2 + y^2). \quad (8.8,4)$$

Вводя эллипсоидальные координаты (α, β, φ) по формулам (8.6,1) и используя найденные выше совокупности частных решений уравнения Лапласа (8.7,3—4), мы можем пытаться искать функции φ^* и φ_e в форме разложений:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^* &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta), \\ \varphi_e &= \sum_{n=0}^{\infty} N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha) P_n(\cos \beta). \end{aligned} \right\} \quad (8.8,5)$$

Для определения коэффициентов M_n, N_n имеем тогда граничные условия

$$\varphi_i = \varphi_e \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi_e}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}, \quad (8.8,6)$$

где α_0 — значение координаты α , соответствующее поверхности эллипсоида*).

Замечая, что

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= -\pi\rho c^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= -\frac{2\pi\rho c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha [P_0(\cos \beta) - P_2(\cos \beta)], \end{aligned} \quad (8.8,7)$$

*) Если c — эксцентриситет, a — большая полуось эллипсоида, то $\operatorname{ch} \alpha_0 = \frac{a}{c}$.

и воспользовавшись (8.8,6), получаем, приравнявая коэффициенты при $P_n(\cos \beta)$ в левой и правой частях равенств (8.8,6):

$$\left. \begin{aligned} M_0 - \frac{2\pi\rho c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha_0 &= N_0 Q_0(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ P_2(\operatorname{ch} \alpha_0) M_2 + \frac{2\pi\rho c^2}{3} \operatorname{sh}^2 \alpha_0 &= N_2 Q_2(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ -\frac{4\pi\rho c^2}{3} \operatorname{ch} \alpha_0 &= N_0 Q'_0(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ P'_2(\operatorname{ch} \alpha_0) M_2 + \frac{4\pi\rho c^2}{3} \operatorname{ch} \alpha_0 &= N_2 Q'_2(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ M_n P_n(\operatorname{ch} \alpha_0) &= N_n Q_n(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ M_n P'_n(\operatorname{ch} \alpha_0) &= N_n Q'_n(\operatorname{ch} \alpha_0), \\ n &= 1, 3, 4, 5, \dots \end{aligned} \right\} \quad (8.8,8)$$

Из последних уравнений системы (8.8,8) следует, что $M_n = N_n = 0$ для всех n , отличных от нуля или двух; поэтому решение представляется в замкнутой форме и легко допускает непосредственную проверку.

Коэффициенты M_0, N_0, M_2, N_2 вычисляются из остальных уравнений рассматриваемой системы.

После несложных преобразований, в ходе которых используются формулы (7.7,2), (7.9,1) и равенство

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho c^3 \operatorname{ch} \alpha_0 \operatorname{sh}^2 \alpha_0,$$

приходим к следующему выражению для потенциала в области, внешней к эллипсоиду:

$$\varphi_e = \frac{M}{c} [Q_0(\operatorname{ch} \alpha) - Q_2(\operatorname{ch} \alpha) P_2(\cos \beta)]. \quad (8.8,9)$$

Значение потенциала для внутренней области получается аналогичным образом. С помощью формул (7.9,1) потенциалы φ_i и φ_e могут быть выражены через элементарные функции.

§ 8.9. Краевая задача для гиперboloида вращения

Возможность разделения переменных в уравнении Лапласа в вырожденных эллипсоидальных координатах может быть использована также для решения некоторых краевых задач, относящихся к гиперboloида вращения.

Пусть (α, β, φ) будет система криволинейных координат, определенная с помощью равенств (8.6,1); следовательно, поверхность $\beta = \beta_0$ ограничивает некоторый гиперboloид вращения (рис. 23). Задача Дирихле для рассматриваемого гиперboloида формулируется следующим образом:

Найти функцию u , гармоническую в области $0 \leq \beta < \beta_0$, непрерывную в области $0 \leq \beta \leq \beta_0$, удовлетворяющую условию $u|_{\beta=\beta_0} = f$ и условию на бесконечности: $u \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$ равномерно в данной области. Функция f предполагается непрерывной и стремящейся к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$. Кроме того, мы ограничимся случаем симметрии вращения, в соответствии с чем примем, что f зависит только от значений переменного α , $f = f(\alpha)$. Покажем, что решение рассматриваемой задачи, а также некоторых других краевых задач, связанных с областью данного вида, может быть получено путем суперпозиции частных решений уравнения Лапласа

$$u = u_\tau = M_\tau P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) P_{-1/2+i\tau}(\cos \beta), \quad \tau \geq 0, \quad (8.9,1)$$

каждое из которых есть гармоническая функция внутри гиперboloида $\beta = \beta_0$, стремящаяся к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$ *). Указанная возможность основана на существовании формулы, аналогичной интегралу Фурье, дающей разложение произвольной функции $g(x)$, определенной на промежутке $(1, \infty)$, в интеграл по функциям $P_{-1/2+i\tau}(x)$:

$$\left. \begin{aligned} g(x) &= \int_0^\infty G(\tau) P_{-1/2+i\tau}(x) d\tau \quad (1 < x < \infty), \\ G(\tau) &= \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_1^\infty f(x) P_{-1/2+i\tau}(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (8.9,2)$$

Формула (8.9,2) известна под названием интеграла Мелера — Фока и справедлива для любой функции $g(x)$, непре-

* Если выбрать в (8.6,6—7) $\mu = 0$, $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$, то находим

$$B = CP_{-1/2+i\tau}(\cos \beta) + DP_{-1/2+i\tau}(-\cos \beta),$$

$$A = MP_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) + NP_{-1/2+i\tau}(-\operatorname{ch} \alpha),$$

и, из условия ограниченности решения на оси гиперboloида, где α или β равно нулю, следует $D = N = 0$. Заметим еще, что на основании (7.6,14) $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) \rightarrow 0$, когда $\alpha \rightarrow \infty$.

рывной и имеющей ограниченную вариацию в промежутке $1 < a \leq x \leq b < \infty$, для которой интегралы

$$\int_1^a |g(x)|(x-1)^{-3/4} dx, \quad \int_a^\infty |g(x)|x^{-1/2} \ln x dx, \quad (a > 1),$$

сходятся к конечным значениям *).

Воспользовавшись этой формулой, мы можем, при соответствующих ограничениях, наложенных на функцию $f(\alpha)$, представить ее в виде интегрального разложения

$$f(\alpha) = \int_0^\infty F(\tau) P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau \quad (0 \leq \alpha < \infty), \quad (8.9,3)$$

где

$$F(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^\infty f(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha.$$

Тогда интеграл

$$u = \int_0^\infty F(\tau) \frac{P_{-1/2 + i\tau}(\cos \beta)}{P_{-1/2 + i\tau}(\cos \beta_0)} P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.9,4)$$

полученный суперпозицией решений вида (8.9,1), будет, по крайней мере формально, решением поставленной задачи. По поводу конкретных вычислений мы отсылаем читателя к статье автора, где дано решение одной задачи электростатики **).

§ 8.10. Тороидальные координаты

Кроме сферических и вырожденных эллипсоидальных координат, со сферическими функциями связаны так называемые тороидальные координаты, полезные при решении краевых задач, относящихся к области, ограниченной поверхностью тора или поверхностью двух пересекающихся сфер. Система

*) См. В. А. Фок [1], Н. Н. Лебедев [4].
**) Н. Н. Лебедев [3].

тороидальных координат (α, β, φ) определяется при помощи формул *)

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad (8.10,1)$$

где c — масштабный множитель, $0 \leq \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leq \pi$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Координатные поверхности суть торы $\alpha = \operatorname{const}$:

$$(\rho - c \operatorname{cth} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \alpha}\right)^2, \quad (8.10,2)$$

сферы $\beta = \operatorname{const}$:

$$(z - c \operatorname{ctg} \beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin \beta}\right)^2, \quad (8.10,3)$$

пересекающиеся по окружности $\rho = a$, $z = 0$, и плоскости $\varphi = \operatorname{const}$ (рис. 25).

Квадрат линейного элемента в тороидальной системе координат имеет форму:

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} [d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2 \alpha d\varphi^2]; \quad (8.10,4)$$

поэтому коэффициенты Ляме будут:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad H_\varphi = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta},$$

и уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta) \operatorname{sh} \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.10,5)$$

*) Связь тороидальных (α, β, φ) и цилиндрических (ρ, z, φ) координат дается соотношением: $z + i\rho = ci \operatorname{cth} \frac{\alpha + i\beta}{2}$, откуда следует:

$$\rho = \frac{c \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad z = \frac{c \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}.$$

Заметим еще, что отсчет циклических координат β и φ в некоторых случаях выгодней вести между пределами:

$$\beta_1 < \beta \leq 2\pi + \beta_1, \quad \varphi_1 < \varphi \leq 2\pi + \varphi_1.$$

В частности, при $\beta_1 = \varphi_1 = -\pi$ мы получаем интервалы, данные выше.

В отличие от рассмотренных ранее случаев, полученное уравнение не допускает непосредственного разделения пере-

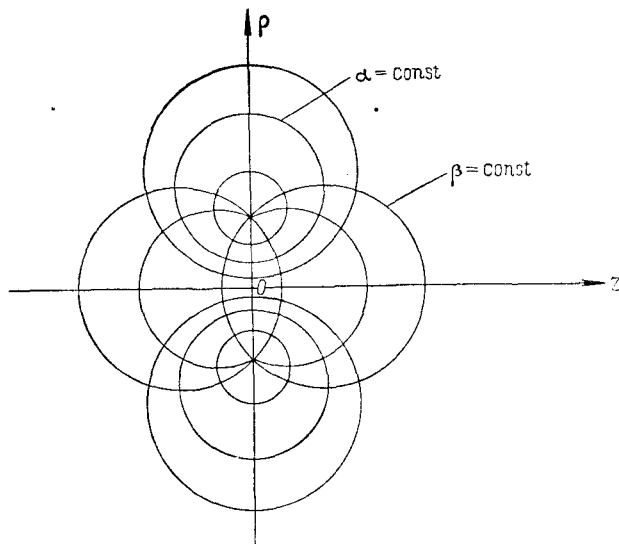


Рис. 25.

менных; однако при помощи подстановки

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} v \quad (8.10,6)$$

оно приводится к уравнению для новой неизвестной функции v :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \operatorname{cth} \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{4} v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (8.10,7)$$

принадлежащему к классу уравнений, позволяющих осуществить это разделение. Действительно, полагая

$$v = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.10,8)$$

получаем

$$\operatorname{sh}^2 \alpha \left[\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{A'}{A} \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} \right] = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu^2,$$

где μ^2 — некоторая постоянная; отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{A''}{A} + \frac{A'}{A} \operatorname{cth} \alpha + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} &= -\frac{B''}{B}, \\ \Phi'' + \mu^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.10,9)$$

Обозначая постоянную, которой равны обе стороны последнего равенства, через ν^2 , находим:

$$B'' + \nu^2 B = 0, \quad (8.10,10)$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{d}{d\alpha} \operatorname{sh} \alpha \frac{dA}{d\alpha} - \left[\nu^2 - \frac{1}{4} + \frac{\mu^2}{\operatorname{sh}^2 \alpha} \right] A = 0. \quad (8.10,11)$$

Таким образом, уравнение Лапласа допускает бесконечное множество решений вида

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi), \quad (8.10,12)$$

где A , B и Φ суть интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений (8.10,9—11).

Решение краевых задач математической физики для областей, перечисленных в начале данного параграфа, может быть получено путем суперпозиции этих частных интегралов. В случае симметрии вращения, когда искомая функция u не зависит от координаты φ , надлежит положить $\mu = 0$ и $\Phi = 1$. Интегрируя уравнения (8.10,10—11), находим для этого случая:

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [A P_{\nu, -1/2}(\operatorname{ch} \alpha) + B Q_{\nu, -1/2}(\operatorname{ch} \alpha)] \times \\ \times [C \cos \nu \beta + D \sin \nu \beta]. \quad (8.10,13)$$

§ 8.11. Краевая задача для тора. Пример из электростатики

В виде примера на приложение тороидальных координат дадим решение первой краевой задачи для области, ограниченной поверхностью тора $\alpha = \alpha_0$, причем, чтобы не усложнять рассуждений, рассмотрим случай симметрии вращения. Из соображений непрерывности следует, что построенные выше частные решения (8.10,13) должны удовлетворять условиям *):

$$u \Big|_{\beta = -\pi} = u \Big|_{\beta = \pi}, \quad \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta = -\pi} = \frac{\partial u}{\partial \beta} \Big|_{\beta = \pi},$$

*) Эти условия равносильны требованию периодичности решения относительно циклической координаты β .

что возможно лишь в том случае, если параметр ν есть целое число, которое, не ограничивая общности, можно считать положительным, $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

При рассмотрении внутренней задачи нам необходимо получить решения, ограниченные в области $\alpha_0 \leq \alpha < \infty$, поэтому, на основании формул (7.6,12), (7.10,8), дающих поведение сферических функций при больших значениях аргумента, следует положить $A = 0$. Напротив, для внешней задачи, которой соответствует промежуток $0 \leq \alpha < \alpha_0$, необходимо, учитывая поведение рассматриваемых функций при $\alpha \rightarrow 0$, принять $B = 0$ (*). Таким образом, совокупность решений уравнения Лапласа, пригодных для решения внутренней краевой задачи, будет (**)

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_n \cos n\beta + N_n \sin n\beta] Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (8.11,1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

и соответствующая совокупность для внешней задачи

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_n \cos n\beta + N_n \sin n\beta] P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (8.11,2)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть, например, требуется решить задачу электростатики о распределении электричества на проводнике, имеющем форму тора.

Как известно, рассматриваемая задача сводится к решению внешней задачи Дирихле при граничном условии

$$u \Big|_{\alpha = \alpha_0} = V, \quad (8.11,3)$$

где u — искомый потенциал электростатического поля в части пространства, лежащей вне проводника, V — постоянное зна-

*) См., например, асимптотические формулы примеров 3, 4 упражнений к гл. VII.

**) По этой причине функции $P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$ и $Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)$ иногда называют тороидальными.

чение, которое принимает этот потенциал на поверхности тора. Связь величин c и α_0 с геометрическими параметрами r и R тора (рис. 26), как следует из (8.10,2), дается формулами:

$$c \operatorname{cth} \alpha_0 = R, \quad \frac{c}{\operatorname{sh} \alpha_0} = r,$$

$$\text{откуда вытекает } c = \sqrt{R^2 - r^2},$$

$$\operatorname{ch} \alpha_0 = \frac{R}{r}.$$

Согласно изложенному выше, мы можем пытаться искать решение задачи в виде суммы частных решений вида (8.11,2), причем из соображений симметрии относительно плоскости $z = 0$, следует принять $N_n = 0$, т. е. положить:

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \cos n\beta. \quad (8.11,4)$$

Граничное условие (8.11,3) удовлетворится, если определить M_n из условия

$$V (2 \operatorname{ch} \alpha_0 - 2 \cos \beta)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) \cos n\beta$$

$$(-\pi \leq \beta \leq \pi), \quad (8.11,5)$$

для чего достаточно разложить левую сторону в ряд Фурье в промежутке $(-\pi, \pi)$. Воспользовавшись формулой (7.10,10), находим:

$$M_n P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{2V}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\beta}{\sqrt{2 \operatorname{ch} \alpha_0 - 2 \cos \beta}} d\beta =$$

$$= \frac{2V}{\pi} Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$M_0 P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) = \frac{V}{\pi} Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0),$$

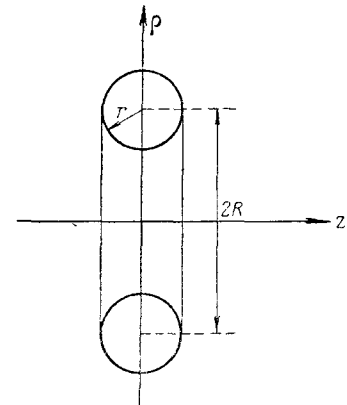


Рис. 26.

откуда следует, что формальное решение задачи будет:

$$u = \frac{V}{\pi} (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \left[\frac{P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0)} Q_{-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha)}{P_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0)} Q_{n-1/2}(\operatorname{ch} \alpha_0) \cos n\beta \right]. \quad (8.11,6)$$

Можно показать с помощью асимптотических представлений § 7.11, что ряд (8.11,6) сходится и действительно дает решение проблемы.

Плотность распределения заряда по поверхности тора может быть вычислена из соотношения:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{H_\alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -\frac{1}{4\pi c} (\operatorname{ch} \alpha_0 - \cos \beta)^{1/2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_0}. \quad (8.11,7)$$

В заключение заметим, что ход решения краевых проблем в общем случае, когда искомая функция зависит от всех трех переменных (α, β, φ) , в принципе не отличается от изложенного, причем подходящими совокупностями решений уравнения Лапласа для внутренней и внешней задач будут соответственно:

$$u = u_{mn} = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} (M_{mn} \cos n\beta + N_{mn} \sin n\beta) Q_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}, \quad (8.11,8)$$

$$u = u_{mn} = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} (M_{mn} \cos n\beta + N_{mn} \sin n\beta) P_{n-1/2}^m(\operatorname{ch} \alpha) \frac{\cos m \varphi}{\sin m \varphi}, \quad (8.11,9)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$

§ 8.12. Краевая задача для области, ограниченной двумя пересекающимися сферами

Тороидальные координаты могут быть использованы также для рассмотрения краевых задач, относящихся к области, границу которой образуют две пересекающиеся сферы. Пусть (x, y, z) будет система прямоугольных координат, начало

которой выбрано в центре круга γ , по которому пересекаются сферы, и ось z проходит через центры этих сфер (рис. 27). Введем систему тороидальных координат (α, β, γ) , связанных с (x, y, z) соотношениями (8.10,1), где постоянный множитель c выбран равным радиусу круга γ . Пусть β_p будет угол, образованный касательной плоскостью к сфере S_p ($p = 1, 2$), проведенной в какой-либо точке окружности γ ,

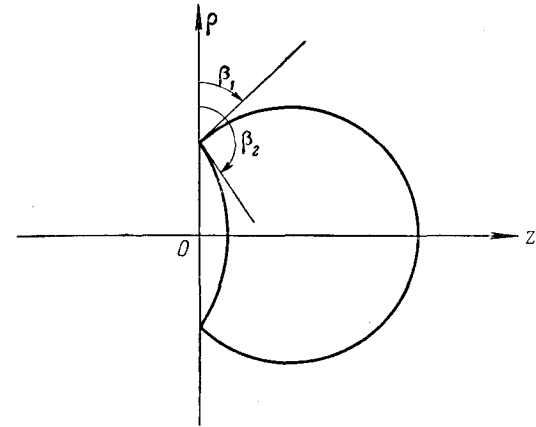


Рис. 27.

и плоскостью $z=0$, причем $0 < \beta_1 < \beta_2 < 2\pi$. Тогда из (8.10,3) следует, что уравнение поверхности S_p в тороидальных координатах будет $\beta = \beta_p$, и внутренней области D_i , ограниченной сферами, соответствует промежуток $\beta_1 < \beta < \beta_2$, внешней области D_e — промежуток $\beta_2 < \beta < \beta_1 + 2\pi$. Переменная α в каждой из областей изменяется в промежутке $0 \leq \alpha < \infty$, причем значениям $\alpha = 0$ отвечают точки оси z , значениям $\alpha = \infty$ — точки на ребре γ . Бесконечно удаленная точка пространства соответствует значениям $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 2\pi$.

Рассмотрим задачу Дирихле для внешней и внутренней областей, причем ограничимся случаем симметрии вращения. Мы можем так же, как и выше, исходить из решений (8.10,13), однако в данном случае, в отличие от § 8.11, нет основания считать γ целым положительным числом. Мы покажем, что

решение рассматриваемых краевых задач может быть построено путем суперпозиции решений вида

$$u = u_\tau = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} [M_\tau \operatorname{ch} \tau \beta + N_\tau \operatorname{sh} \tau \beta] P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha), \quad (8.12,1)$$

$$\tau \geq 0$$

получающихся из (8.10,13), если выбрать $\nu = i\tau$ и положить $B = 0$ *). Предположим, для определенности, что мы имеем дело с внутренней задачей, и допустим, что функции $f_p = f_p(\alpha)$, входящие в граничные условия

$$u|_{\beta = \beta_p} = f_p, \quad p = 1, 2, \quad (8.12,2)$$

таковы, что функции $\varphi_p(\alpha) = f_p(\alpha) (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2}$ могут быть представлены интегралами вида

$$\varphi_p(\alpha) = f_p(\alpha) (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \int_0^\infty \Phi_p(\tau) P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad 0 \leq \alpha < \infty, \quad (8.12,3)$$

где коэффициенты $\Phi_p(\tau)$ не зависят от α . На основании теоремы Мелера — Фока (8.9,2), такое представление возможно и функции $\Phi_p(\tau)$ могут быть вычислены по формулам

$$\Phi_p(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^\infty \varphi_p(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha, \quad (8.12,4)$$

если функции $f_p(\alpha)$ непрерывны, имеют ограниченную вариацию на промежутке $0 \leq \alpha < A < \infty$ и, кроме того, интегралы

$$\int_0^\infty \alpha |f_p(\alpha)| d\alpha \quad (8.12,5)$$

сходятся к конечным значениям. Последнее условие предусматривает, что $f_p(\alpha)$ при $\alpha \rightarrow \infty$, т. е. при приближении к ребру поверхности, достаточно быстрым образом стремится к нулю, что может не иметь места, так как $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_p =$

*) Последнее необходимо для того, чтобы решения оставались ограниченными на оси z .

$= f_p(\infty) = u_\gamma$, где u_γ — значение, принимаемое искомой функцией на ребре γ , которое, вообще говоря, отлично от нуля *). Однако в большинстве практически важных случаев рассматриваемое условие выполняется для функции $f_p^*(\alpha) = f_p(\alpha) - f_p(\infty)$; поэтому существует разложение:

$$\varphi_p^*(\alpha) = [f_p(\alpha) - f_p(\infty)] (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \int_0^\infty \Phi_p^*(\tau) P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12,6)$$

где $\Phi_p^*(\tau)$ определяется равенством:

$$\Phi_p^*(\tau) = \tau \operatorname{th} \pi \tau \int_0^\infty \varphi_p^*(\alpha) \operatorname{sh} \alpha P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\alpha. \quad (8.12,7)$$

С другой стороны, основываясь на интегральном представлении (7.4,1), легко показать, что при $0 < \beta_p < 2\pi$

$$(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta_p)^{-1/2} = \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta_p)\tau}{\operatorname{ch} \pi \tau} P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau. \quad (8.12,8)$$

Умножая (8.12,8) на $f_p(\infty)$ и складывая с (8.12,6), получаем для $\varphi_p(\alpha)$ разложение требуемого вида (8.12,3), где

$$\Phi_p(\tau) = \Phi_p^*(\tau) + \frac{f_p(\infty)}{\operatorname{ch} \pi \tau} \operatorname{ch}(\pi - \beta_p)\tau. \quad (8.12,9)$$

Возвращаясь к решению задачи Дирихле, рассмотрим интеграл

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \int_0^\infty \frac{\Phi_2 \operatorname{sh} \tau (\beta_2 - \beta_1) + \Phi_1 \operatorname{sh} \tau (\beta_2 - \beta)}{\operatorname{sh} \tau (\beta_2 - \beta_1)} P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12,10)$$

составленный из частных решений вида (8.12,1). Легко видеть, что граничные условия (8.12,2) будут тогда удовлетворены, и рассматриваемая формула дает решение поставленной задачи.

*) Мы предполагаем, что граничная функция непрерывна, но все рассуждения легко распространяются на случай кусочной непрерывности, когда пределы $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} f_p$ могут быть различны для $p = 1$ и $p = 2$.

Аналогичным образом решение внешней задачи Дирихле может быть получено в виде

$$u = (2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \int_0^\infty \frac{\Phi_1 \operatorname{sh} \tau (\beta - \beta_2) + \Phi_2 \operatorname{sh} \tau (2\pi + \beta_1 - \beta)}{\operatorname{sh} \tau (2\pi + \beta_1 - \beta_2)} P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12,11)$$

где

$$f_1(\alpha) = u \Big|_{\beta = \beta_1 + 2\pi}, \quad f_2(\alpha) = u \Big|_{\beta = \beta_2},$$

а остальные обозначения имеют то же значение, что и выше. В виде простого и интересного примера рассмотрим задачу

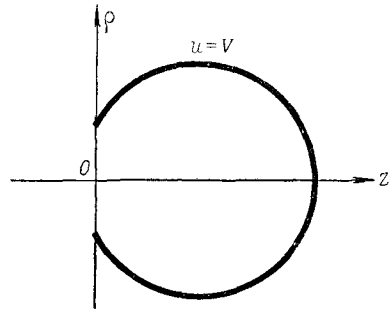


Рис. 28.

о распределении электричества на тонкой проводящей сфере с круговым вырезом (рис. 28). Если обозначить через u потенциал электрического поля в произвольной точке пространства и V — постоянное значение, которое принимает этот потенциал на поверхности проводника, то задача сводится к рассмотренной выше внешней задаче Дирихле для част-

ного случая $\beta_1 = \beta_2 = \beta_0$, $f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = V$. Значения Φ_1 и Φ_2 получаются в данном случае непосредственно из формулы (8.12,8), которая дает

$$\Phi_1 = \Phi_2 = V \frac{\operatorname{ch}(\pi - \beta_0) \tau}{\operatorname{ch} \pi \tau},$$

откуда следует:

$$u = V(2 \operatorname{ch} \alpha - 2 \cos \beta)^{1/2} \times \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \tau (\pi - \beta_0)}{\operatorname{ch}^2 \pi \tau} \operatorname{ch} \tau (\pi + \beta_0 - \beta) P_{-1/2 + i\tau}(\operatorname{ch} \alpha) d\tau, \quad (8.12,12)$$

$$\beta_0 < \beta < \beta_0 + 2\pi.$$

Интеграл (8.12,12) может быть вычислен с помощью подстановки (7.4,6), что приводит к решению в замкнутой форме

$$u = \frac{V}{2} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \right\} + \frac{V}{\pi} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}} - \sqrt{\frac{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{2\beta_0 - \beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch} \alpha - \cos(2\beta_0 - \beta)}} \right\}, \quad (8.12,13)$$

которое, как нетрудно проверить, удовлетворяет всем условиям задачи.

§ 8.13. Биполярные координаты и их приложения к краевым задачам математической физики

Еще один вид ортогональных криволинейных координат, для которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных и применение метода частных решений связано с использованием аппарата сферических функций, представляют собой пространственные биполярные координаты. Эти координаты по своей природе родственны тороидальным и могут быть использованы при решении краевых задач для двусвязной области, ограниченной двумя непересекающимися сферами. Пространственные биполярные координаты (α, β, φ) определяются при помощи формул*):

$$x = \frac{c \sin \alpha \cos \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad y = \frac{c \sin \alpha \sin \varphi}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad (8.13,1)$$

где c — постоянный множитель, $0 \leq \alpha < \infty$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

Координатные поверхности в рассматриваемой системе координат суть веретенообразные поверхности вращения $\alpha = \text{const}$:

$$(\rho - c \operatorname{ctg} \alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin \alpha} \right)^2, \quad (8.13,2)$$

* Если ввести, как промежуточную, систему цилиндрических координат, то формулы (8.13,1) могут быть представлены в компактной форме: $z + ip = ct \operatorname{ctg} \frac{\alpha + i\beta}{2}$.

сферы $\beta = \text{const}$:

$$\rho^2 + (z - c \operatorname{ch} \beta)^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh} \beta}\right)^2 \quad (8.13,3)$$

и плоскости $\varphi = \text{const}$ (рис. 29).

Значениям $\beta = \pm \infty$ соответствуют точки ($\rho = 0, z = \pm c$), значениям $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ — бесконечная удаленная точка.

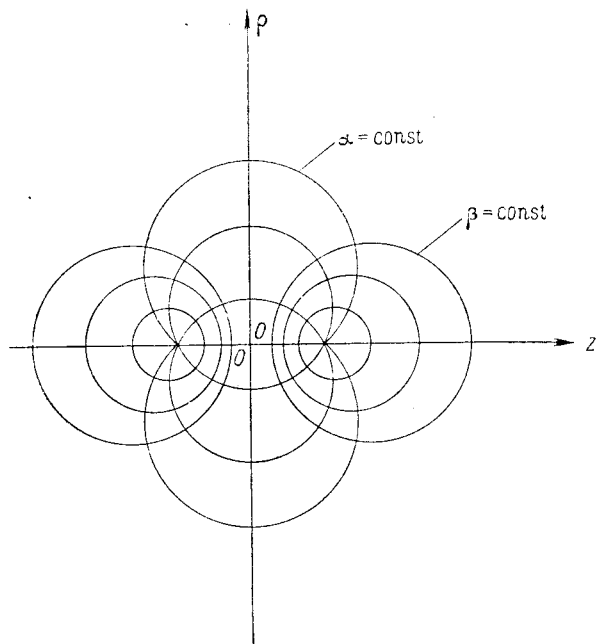


Рис. 29.

Выражение для квадрата линейного элемента в пространственных биполярных координатах имеет вид:

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)^2} [d\alpha^2 + d\rho^2 + \sin^2 \alpha d\varphi^2], \quad (8.13,4)$$

откуда следует:

$$H_\alpha = H_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha}, \quad H_\varphi = \frac{c \sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha},$$

и уравнение Лапласа после преобразования к новым переменным будет:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin \alpha (\operatorname{ch} \beta - \cos \alpha)} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (8.13,5)$$

Так же, как в случае тороидальных координат, переменные могут быть разделены, если ввести новую искомую неизвестную функцию v при помощи подстановки

$$u = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} v, \quad (8.13,6)$$

а затем искать частные решения полученного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \frac{1}{4} v + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (8.13,7)$$

вида:

$$v = A(\alpha) B(\beta) \Phi(\varphi). \quad (8.13,8)$$

Для определения каждого из множителей получаются тогда уравнения:

$$\Phi'' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.13,9)$$

$$B'' - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2 B = 0, \quad (8.13,10)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \left(\sin \alpha \frac{dA}{d\alpha} \right) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \alpha} \right] A = 0, \quad (8.13,11)$$

первые два из которых интегрируются в элементарных функциях, последнее — в сферических. В частности, для случая симметрии вращения, когда искомая функция u не зависит от φ , получаем:

$$u = [AP_\nu(\cos \alpha) + BQ_\nu(\cos \alpha)] \cdot \left[C \operatorname{ch} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \beta + D \operatorname{sh} \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \beta \right] (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2}. \quad (8.13,12)$$

В задачах, связанных с областью, ограниченной двумя непересекающимися сферами $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$, переменная α изменяется в замкнутом интервале $(0, \pi)$, поэтому для получения решений, конечных на оси z , необходимо положить $B = 0$ и выбрать $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (§ 8.3).

Таким образом, подходящая для рассмотрения данного класса задач совокупность частных решений уравнения Лапласа будет:

$$u = u_n = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \left[M_n \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta + N_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \right] P_n(\cos \alpha), \quad (8.13,13)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Соответствующая совокупность, пригодная для решения краевой задачи для области, ограниченной поверхностью $\alpha = \alpha_0$, получается, если выбрать $\nu = -\frac{1}{2} + i\tau$ ($\tau \geq 0$), и имеет следующий вид:

$$u = u_\tau = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} [M_\tau \cos \tau \beta + N_\tau \sin \tau \beta] P_{-1/2+i\tau}(\pm \cos \alpha), \quad \tau \geq 0, \quad (8.13,14)$$

где верхний знак отвечает внешней ($0 \leq \alpha < \alpha_0$), нижний — внутренней ($\alpha_0 < \alpha \leq \pi$) краевой задаче.

В виде примера рассмотрим электростатическую задачу о поле между двумя сферическими проводниками радиуса r ,

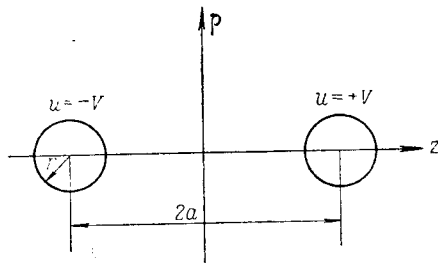


Рис. 30.

центры которых находятся на расстоянии $2a$ один от другого и потенциалы имеют значение $\pm V$ (рис. 30).

Если величины c и β_0 выбраны таким образом, чтобы

$$c \operatorname{cth} \beta_0 = a, \quad \frac{c}{\operatorname{sh} \beta_0} = r,$$

т. е. $c = \sqrt{a^2 - r^2}$, $\operatorname{ch} \beta_0 = \frac{a}{r}$, то уравнения сфер в биполярных координатах будут $\beta = \pm \beta_0$, и рассматриваемая

задача сводится к определению гармонической в области $-\beta_0 < \beta < \beta_0$ функции u (u — потенциал электрического поля), удовлетворяющей граничным условиям $u|_{\beta = \pm \beta_0} = \pm V$. Воспользовавшись (8.13,13) и принимая во внимание, что u — нечетная функция β , будем искать решение в виде:

$$u = (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} M_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta \cdot P_n(\cos \alpha). \quad (8.13,15)$$

Постоянные M_n должны быть тогда определены из тождества:

$$V (2 \operatorname{ch} \beta_0 - 2 \cos \alpha)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta_0 \cdot P_n(\cos \alpha),$$

$$(0 \leq \alpha \leq \pi).$$

Разлагая левую часть в ряд по полиномам Лежандра с помощью формулы (4.2,3), получаем:

$$V (2 \operatorname{ch} \beta_0 - 2 \cos \alpha)^{-1/2} = V e^{-\beta_0/2} (1 - 2e^{-\beta_0} \cos \alpha + e^{-2\beta_0})^{-1/2} = V \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta_0} P_n(\cos \alpha),$$

откуда следует:

$$M_n \operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta_0 = V e^{-(n+1/2)\beta_0}.$$

Таким образом, решение может быть представлено в форме ряда

$$u = V (2 \operatorname{ch} \beta - 2 \cos \alpha)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\beta_0} \frac{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta}{\operatorname{sh} \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta_0} P_n(\cos \alpha), \quad (8.13,16)$$

который, как легко показать, сходится и удовлетворяет всем условиям задачи.

§ 8.14. Приложение сферических функций к интегрированию уравнения Гельмгольца

Сферические функции встречаются в математической физике не только в связи с уравнением Лапласа, но также при интегрировании некоторых других уравнений, среди которых, в первую очередь, должно быть названо уравнение Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$. Если преобразовать это уравнение к сферической системе координат (r, θ, φ) и искать затем частные решения вида

$$u = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad (8.14,1)$$

то так же, как в § 8.2, мы имеем возможность разделить переменные, и для определения каждого из множителей получаются следующие дифференциальные уравнения:

$$\Phi' + \mu^2 \Phi = 0, \quad (8.14,2)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta = 0, \quad (8.14,3)$$

$$\frac{d}{dr} (r^2 R') + [k^2 r^2 - \nu(\nu+1)] R = 0, \quad (8.14,4)$$

где μ и ν обозначают произвольные параметры, которые могут иметь вещественные или комплексные значения*).

Первые два уравнения совпадают с уравнениями (8.2,6—7) и интегрируются: одно в элементарных, другое — в сферических функциях. Последнее уравнение (8.14,4) при помощи подстановки

$$R = r^{-1/2} v \quad (8.14,5)$$

приводится к уравнению Бесселя от аргумента $z = kr$

$$v'' + \frac{1}{r} v' + \left(k^2 - \frac{\left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2}{r^2} \right) v = 0, \quad (8.14,6)$$

и интеграл его выражается через цилиндрические функции. В частности, для случая симметрии вращения, когда u не зависит от координаты φ , получаем:

$$u = r^{-1/2} [AJ_{\nu+1/2}(kr) + BH_{\nu+1/2}^{(2)}(kr)] \times \\ \times [CP_{\nu}(\cos \theta) + DQ_{\nu}(\cos \theta)], \quad (8.14,7)$$

*) Можно считать, что $R(\mu) \geq 0$, $R(\nu) \geq -\frac{1}{2}$. См. примечание на стр. 273.

где $J_{\nu}(z)$ — функция Бесселя, $H_{\nu}^{(2)}(z)$ — функция Ханкеля второго рода*). В тех задачах, где θ изменяется в замкнутом промежутке $(0, \pi)$, следует, из условия ограниченности решения, положить $D=0$ и выбрать ν равным целому положительному числу $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). При помощи суперпозиции решений (8.14,7) можно получить решение многих проблем математической физики, среди которых мы упомянем важную задачу о диффракции электромагнитных волн у поверхности Земли**).

*) Эта форма интеграла удобна в том случае, если временная зависимость в задаче на установившиеся колебания характеризуется множителем $e^{i\omega t}$. При обратном знаке в показателе следует заменить $H_{\nu+1/2}^{(2)}(kr)$ на $H_{\nu+1/2}^{(1)}(kr)$.
**) См., например, Г. А. Гринберг [1], гл. XXIII.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛАВЕ VIII

Левин В. И. и Гросберг Ю. И. [1], Тихонов А. Н. и Самарский А. А. [1], Гринберг Г. А. [1], Франк Ф. и Мизес Р. [1], Гобсон Е. [1], Мак Роберт [1], Бейтман [1], Джефрис Х. и Джефрис Б. [1].

ГЛАВА IX

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 9.1. Гипергеометрический ряд и его аналитическое продолжение

Гипергеометрическим рядом (§ 7.2) называется степенной ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k,$$

где z — комплексное переменное, α, β, γ — параметры, которые могут принимать любые вещественные или комплексные значения ($\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$), и символ $(\lambda)_k$ обозначает величину

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad (\lambda)_0 = 1.$$

Если α или β — нуль или целое отрицательное число, ряд обрывается на конечном числе членов и сумма его представляет собой полином относительно z . За исключением этого случая радиус сходимости гипергеометрического ряда равняется единице, в чем легко убедиться с помощью признака сходимости Даламбера. В круге $|z| < 1$ сумма ряда

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} z^k \quad (9.1,1)$$

представляет регулярную функцию комплексного переменного z , значение которой в области, не принадлежащей кругу сходимости, определяется путем аналитического продолжения рассматриваемого ряда.

Мы докажем, что существует функция комплексного переменного z , регулярная в плоскости с разрезом $(1, \infty)$, совпадающая с суммой ряда (9.1,1) при $|z| < 1$ и, следовательно, являющаяся его аналитическим продолжением в разрезанную плоскость. Эта функция, которая в силу единственности аналитического продолжения определяется вполне однозначным образом, называется гипергеометрической функцией и обозначается тем же символом $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, как сумма гипергеометрического ряда. Для доказательства предположим сначала, что параметры гипергеометрического ряда удовлетворяют условию $R(\gamma) > R(\beta) > 0$, и рассмотрим интеграл

$$J(z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha} dt, \quad (9.1,2)$$

где $(1-tz)^{-\alpha}$ обозначает ту ветвь функции, которая приводится к единице при $z \rightarrow 0$. При z , принадлежащих области

$$|z| \leq R, \quad |z-1| \geq \rho, \quad \delta \leq \arg(z-1) \leq 2\pi - \delta$$

(R — произвольно большое, ρ и δ — произвольно малые положительные числа), и $0 < t < 1$ подынтегральное выражение представляет регулярную функцию комплексного переменного z и непрерывную функцию вещественного переменного t . Далее, для таких z и t имеет место неравенство *)

$$\frac{\rho \sin \delta}{1+\rho} \leq |1-tz| \leq 1+R,$$

откуда легко получить оценку:

$$|t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-tz)^{-\alpha}| \leq M t^{R(\beta)-1} (1-t)^{R(\gamma)-R(\beta)-1},$$

где M обозначает первое или второе из чисел

$$\left(\frac{\rho \sin \delta}{1+\rho}\right)^{-R(\alpha)} e^{\pi |I(\alpha)|}, \quad (1+R)^{R(\alpha)} e^{\pi |I(\alpha)|},$$

смотря по тому, $R(\alpha) > 0$ или $R(\alpha) < 0$. Найденная оценка показывает, что при выполнении условия $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ интеграл (9.1,2) сходится равномерно в рассматриваемой области изменения z . Отсюда следует, что $J(z)$ есть функция

*) Из геометрических соображений вытекает, что минимум $(1-tz)$ достигается при $z = 1 + \rho e^{i\delta}$.

комплексного переменного z , регулярная в плоскости с разрезом $(1, \infty)$.

При $|z| < 1$ интеграл $J(z)$ может быть разложен в степенной ряд, коэффициенты которого легко вычислить, заменяя функцию $(1-tz)^{-\alpha}$ биномиальным рядом и интегрируя почленно. Мы находим *):

$$J(z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-\gamma-1} dt \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(\alpha)k!} (tz)^k = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!} z^k \times \\ \times \int_0^1 t^{k+\beta-1} (1-t)^{\beta-\gamma-1} dt,$$

или, принимая во внимание (1.5,6):

$$J(z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(k+\gamma)k!} z^k \equiv F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

где $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ обозначает сумму гипергеометрического ряда.

Таким образом, $J(z)$ представляет собой искомое аналитическое продолжение гипергеометрического ряда (9.1,1), и общее аналитическое выражение гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ для случая $R(\gamma) > R(\beta) > 0$, пригодное на всей плоскости с разрезом $(1, \infty)$, дается формулой:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\beta-\gamma-1} (1-tz)^{-\alpha} dt. \quad (9.1,3)$$

В общем случае, когда параметры имеют произвольные значения, аналитическое продолжение гипергеометрического ряда в разрезанную плоскость может быть получено в форме комплексного интеграла, получающегося суммированием ряда (9.1,1) с помощью теории вычетов **). Мы дадим другое дока-

*) Изменение порядка интегрирования и суммирования законно ввиду абсолютной сходимости.

**) См., например, Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон [1], 14.51.

зательство возможности аналитического продолжения, основанное на рассуждениях более элементарного характера, но имеющее тот недостаток, что оно не позволяет получить в явной форме общее аналитическое выражение для гипергеометрической функции. Доказательство опирается на использование двух рекуррентных соотношений:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, z) + \\ + \frac{\alpha}{\gamma} (1-z) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z), \quad (9.1,4)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\gamma-\alpha}{\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma+1, z) + \\ + \frac{\alpha}{\gamma} F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, z), \quad (9.1,5)$$

которым удовлетворяет сумма гипергеометрического ряда $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, в чем легко убедиться, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств *). Путем повторного применения этих формул мы можем представить гипергеометрический ряд $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ с произвольными ограниченными параметрами, не удовлетворяющими условию $R(\gamma) > R(\beta) > 0$, в виде конечной суммы слагаемых, каждое из которых есть произведение гипергеометрического ряда $F(\alpha', \beta', \gamma', z)$ с параметрами, подчиненными условию $R(\gamma') > R(\beta') > 0$, на некоторый полином относительно z **).

Выполнив аналитическое продолжение в разрезанную плоскость каждого из гипергеометрических рядов $F(\alpha', \beta', \gamma', z)$ с помощью формулы (9.1,3) и складывая результаты, мы,

*) Коэффициент при z^k в правой части (9.1,4) равен

$$\frac{\gamma-\alpha}{\gamma} \frac{(\alpha)_k (\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{(\alpha+1)_k (\beta+1)_k}{(\gamma+1)_k k!} - \frac{\alpha}{\gamma} \frac{(\alpha+1)_{k-1} (\beta+1)_{k-1}}{(\gamma+1)_{k-1} (k-1)!} = \\ = \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!} \left[\frac{\gamma-\alpha}{\gamma+k} \cdot \frac{\beta+k}{\beta} + \frac{\alpha+k}{\gamma+k} \cdot \frac{\beta+k}{\beta} - \frac{k}{\beta} \right] \equiv \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{(\gamma)_k k!},$$

что и доказывает справедливость этой формулы. Формула (9.1,5) доказывается аналогичным образом.

**) Предполагается, что $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. Заметим еще, что, если $R(\beta) \leq 0$, $R(\gamma-\beta) > 0$, то для приведения достаточно воспользоваться формулой (9.1,4); если $R(\gamma-\beta) \leq 0$, $R(\beta) > 0$ — формулой (9.1,5). В общем случае требуемый результат достигается последовательным применением обоих рекуррентных соотношений.

очевидно, получим регулярную в плоскости с разрезом $(1, \infty)$ функцию комплексного переменного z , которая при $|z| < 1$ совпадает с суммой исходного гипергеометрического ряда и, следовательно, является его аналитическим продолжением.

Из общего принципа аналитического продолжения вытекает, что соотношения, справедливые для суммы гипергеометрического ряда, непосредственно распространяются на гипергеометрическую функцию. Так, например, гипергеометрическая функция удовлетворяет гипергеометрическому дифференциальному уравнению (7.2,1), условию симметрии относительно первых двух параметров

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\beta, \alpha, \gamma, z), \quad (9.1,6)$$

рекуррентным соотношениям (9.1,4—5) *) и т. д. Гипергеометрическая функция $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ играет важную роль в анализе, главным образом в связи с тем обстоятельством, что многие функции, встречающиеся в приложениях, могут рассматриваться как ее частные случаи (§ 9.5). Введение этой функции позволяет дать полное решение многих проблем прикладной математики, среди которых может быть упомянута проблема конформного отображения на полуплоскость криволинейного треугольника, ограниченного дугами окружностей, и другие задачи.

§ 9.2. Предел суммы гипергеометрического ряда при $z \rightarrow 1$ и $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$

Для дальнейшего развития теории гипергеометрической функции нам необходимо вычислить предел, к которому стремится сумма гипергеометрического ряда (9.1,1), когда $z \rightarrow 1$ и параметры ряда удовлетворяют условию

$$R(\gamma - \alpha - \beta) > 0 \quad **).$$

Если, кроме этого условия, выполняются неравенства

$$R(\gamma) > R(\beta) > 0,$$

*) Большое число других рекуррентных соотношений гипергеометрической функции приведено в работах Гаусса [1] и [2].

См. также И. М. Рыжик и И. С. Градштейн [1].

***) Можно показать, что если это условие не выполнено, то, за некоторыми исключениями, сумма гипергеометрического ряда неограниченно возрастает, когда $z \rightarrow 1$.

требуемый результат может быть получен путем предельного перехода под знаком интеграла в формуле (9.1,3). Чтобы обосновать законность такого перехода, достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла в замкнутой области $|z| \leq 1, |z - 1| \leq 1$. Легко видеть, что для любого z , принадлежащего этой области, и вещественного t , принадлежащего интервалу $(0, 1)$, $|zt| \leq 1, |1 - zt| \leq 1$, поэтому

$$|1 - zt| \geq 1 - |zt| \geq 1 - t.$$

Из неравенства $1 - t \leq |1 - zt| \leq 1$ вытекает, что

$$|t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tz)^{-\alpha}| \leq t^{R(\beta)-1}(1-t)^{\lambda-1} e^{\frac{\pi}{2}|I(\alpha)|},$$

где $\lambda = R(\gamma - \alpha - \beta)$ или $R(\gamma - \beta)$, смотря по тому, $R(\alpha) \geq 0$, откуда непосредственно следует, что, если выполнены условия $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0, R(\gamma) > R(\beta) > 0$, рассматриваемый интеграл сходится равномерно в области $|z| \leq 1, |z - 1| \leq 1$.

Переходя к пределу под знаком интеграла (9.1,3), получаем:

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta-1} dt,$$

откуда, принимая во внимание (1.5,6), находим:

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}, \quad (9.2,1)$$

$$R(\gamma - \alpha - \beta) > 0, \quad R(\gamma) > R(\beta) > 0.$$

Покажем теперь, что второе условие не является существенным и может быть отброшено. Для доказательства воспользуемся рекуррентными формулами для гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, z) - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} z F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, z), \quad (9.2,2)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = F(\alpha + 1, \beta - 1, \gamma, z) + \frac{\alpha - \beta + 1}{\gamma} z F(\alpha + 1, \beta, \gamma + 1, z), \quad (9.2,3)$$

в справедливости которых легко убедиться, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств*).

Предположим, что вместо условий, указанных выше, параметры гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ удовлетворяют более слабым неравенствам $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, $R(\gamma) > R(\beta) > -1$. Тогда условия, при которых доказана формула (9.2,1), будут выполнены для каждой из гипергеометрических функций, стоящих в правой части (9.2,2), и, применяя эту формулу, мы получим:

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma + 1) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} - \\ - \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma + 2) \Gamma(\gamma - \alpha + \beta)}{\Gamma(\gamma + 1 - \alpha) \Gamma(\gamma + 1 - \beta)} \equiv \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)},$$

т. е. тот же результат, что и выше. Повторяя это рассуждение, мы по индукции докажем, что формула (9.2,1) верна при условии, что $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$ и $R(\gamma) > R(\beta)$. Предположим теперь, что выполняются только более слабые условия: $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, $R(\gamma) > R(\beta) - 1$. Тогда расширенные условия, при которых справедлива формула (9.2,1), удовлетворяются для гипергеометрических функций в правой части (9.2,3), и, воспользовавшись уже доказанной формулой, мы получим:

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha - 1) \Gamma(\gamma - \beta - 1)} + \\ + \frac{\alpha - \beta + 1}{\gamma} \cdot \frac{\Gamma(\gamma + 1) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma + 1 - \beta)} \equiv \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}.$$

Повторяя рассуждения, мы освободимся от условия $R(\gamma) > R(\beta)$. Таким образом,

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad (9.2,4)$$

при единственном условии $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$.

Полученная формула (9.2,4) играет важную роль в теории гипергеометрической функции, в частности используется при выводе функциональных соотношений § 9.3.

*) Ср. стр. 313.

§ 9.3. Функциональные соотношения для гипергеометрической функции

Целью настоящего параграфа является вывод функциональных соотношений для гипергеометрической функции, имеющих большое значение в теории и различных приложениях этой функции. Главная ценность рассматриваемых формул состоит в том, что, пользуясь ими, мы можем представить гипергеометрическую функцию с помощью рядов, имеющих область сходимости ту или иную часть разрезанной плоскости, и тем самым фактически осуществить аналитическое продолжение функции в соответствующие области*).

Мы начнем с вывода функционального соотношения, полезного в том случае, когда необходимо получить аналитическое продолжение гипергеометрической функции в полуплоскость $R(z) < \frac{1}{2}$. Предположим, что z есть комплексное переменное, принадлежащее плоскости с разрезом $(1, \infty)$, и примем, в качестве временного допущения, предположение, что $R(\gamma) > R(\beta) > 0$. Полагая в формуле (9.1,3) $t = 1 - s$, $\gamma - \beta = \beta'$, $\frac{z}{z-1} = z'$ и замечая, что $R(\gamma) > R(\beta') > 0$ и z' принадлежит разрезанной плоскости**), получаем:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \beta') \Gamma(\beta')} \times \\ \times \int_0^1 s^{\beta' - 1} (1 - s)^{\gamma - \beta' - 1} (1 - sz)^{-\alpha} ds = \\ = (1 - z)^{-\alpha} F(\alpha, \beta', \gamma, z'),$$

или

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \\ |\arg(1 - z)| < \pi. \quad (9.3,1)$$

Покажем теперь, что условие $R(\gamma) > R(\beta) > 0$ не является необходимым, и формула (9.3,1) остается справедливой

*) Принципиальная возможность такого продолжения доказана в § 9.1, где указан метод, позволяющий теоретически определить гипергеометрическую функцию на всей плоскости с разрезом $(1, \infty)$.

**) Преобразование $\frac{z}{z-1} = z'$ отображает плоскость (z) с разрезом $(1, \infty)$ на плоскость (z') с тем же разрезом.

при любых значениях параметров. Действительно, пусть вместо данного условия выполняется более слабое условие $R(\gamma) > R(\beta) > -1$. Тогда формула (9.3,1) применима к каждой из гипергеометрических функций в правой части равенства (9.1,4), и мы имеем*):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma + 1, \frac{z}{z-1}\right) + \frac{\alpha}{\gamma} (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha + 1, \gamma - \beta, \gamma + 1, \frac{z}{z-1}\right),$$

или, если воспользоваться (9.1,5):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right),$$

т. е. прежний результат.

Повторяя это рассуждение, мы по индукции докажем, что формула (9.3,1) верна, если выполнено условие $R(\gamma) > R(\beta)$. Чтобы освободиться от этого последнего ограничения, предположим, что удовлетворяется только условие $R(\gamma) > R(\beta) - 1$, и применим доказанную формулу к правой части (9.1,5). Мы получим тогда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma} (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma + 1 - \beta, \gamma + 1, \frac{z}{z-1}\right) + \frac{\alpha}{\gamma} (1 - z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z-1}\right) F\left(\alpha + 1, \gamma + 1 - \beta, \gamma + 1, \frac{z}{z-1}\right),$$

или, принимая во внимание (9.1,4):

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right).$$

Повторяя рассуждение, докажем, что формула (9.3,1) справедлива при произвольных значениях параметров. Преобразование (9.3,1) особенно полезно в том случае, когда комплексное переменное z принадлежит полуплоскости $R(z) < \frac{1}{2}$. В этом случае $\left|\frac{z}{z-1}\right| < 1$, и гипергеометрическая функция в правой части рассматриваемой формулы может быть заменена соответствующим гипергеометрическим рядом,

* Напомним, что соотношения (9.1, 4—5) справедливы на всей разрезанной плоскости.

в результате чего мы получаем явное аналитическое выражение для $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в области $R(z) < \frac{1}{2}$. Если воспользоваться в (9.3,1) условием симметрии (9.1,6), то приходим ко второму функциональному соотношению для гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \gamma, \frac{z}{z-1}\right), \quad |\arg(1 - z)| < \pi, \quad (9.3,2)$$

которое также может быть использовано для аналитического продолжения функции в полуплоскость $R(z) < \frac{1}{2}$. Другой важный результат получается путем последовательного применения обеих формул преобразования (9.3, 1—2). Мы имеем:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{-\alpha} \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^{-(\gamma - \beta)} \times \times F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma, z),$$

или

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \times \times F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, z), \quad |\arg(1 - z)| < \pi. \quad (9.3,3)$$

Перейдем теперь к выводу функционального соотношения, полезного в том случае, когда требуется получить аналитическое продолжение гипергеометрической функции в область $|z| > 1$, $|\arg(-z)| < \pi$ *). Вывод этого соотношения, так же как и ряда других, основывается на том обстоятельстве, что гипергеометрическая функция $u = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ представляет собой частное решение гипергеометрического дифференциального уравнения:

$$z(1 - z)u'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\}u' - \alpha\beta u = 0. \quad (9.3,4)$$

Если произвести в этом уравнении замену переменных по формулам $t = \frac{1}{z}$, $u = z^{-\alpha}v$, то для v снова получается гипергеометрическое дифференциальное уравнение

$$t(1 - t)\frac{d^2v}{dt^2} + \{\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)t\}\frac{dv}{dt} - \alpha'\beta'v = 0 \quad (9.3,5)$$

с параметрами

$$\alpha' = \alpha, \quad \beta' = \alpha + 1 - \gamma, \quad \gamma' = 1 + \alpha - \beta.$$

* Часть плоскости с разрезом $(1, \infty)$, лежащая вне круга радиуса единица с центром в точке $z = 0$.

Если $\gamma' \neq 0, -1, -2, \dots$, последнее уравнение имеет решение $v = F(\alpha', \beta', \gamma', t)$, поэтому функция

$$u_1 = (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{z}\right),$$

где $|\arg(-z)| < \pi$, есть частный интеграл уравнения (9.3,4) при $\alpha - \beta \neq -1, -2, \dots$ *).

В силу симметрии относительно α и β , функция

$$u_2 = (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{z}\right)$$

будет интегралом того же уравнения при $\alpha - \beta \neq 1, 2, \dots$

Если $\alpha - \beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, оба интеграла существуют одновременно и линейно независимы между собой **), поэтому всякий интеграл уравнения (9.3,4) может быть представлен как линейная комбинация этих решений. Таким образом, при $\alpha - \beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ должно существовать линейное соотношение вида:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = A_1 u_1 + A_2 u_2, \quad (9.3,6)$$

где A_1, A_2 — некоторые, не зависящие от z постоянные, причем, если $A_1 = f(\alpha, \beta, \gamma)$, то, в силу симметрии относительно α и β , $A_2 = f(\beta, \alpha, \gamma)$. Для окончательного определения этих постоянных предположим сначала, что $R(\alpha - \beta) < 0$. Тогда из (9.3,6) следует, что

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} A_1 < (-z)^{-\alpha},$$

и одновременно из (9.3,1), на основании (9.2,1),

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} (-z)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)},$$

откуда

$$A_1 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}. \quad (9.3,7)$$

Если $R(\alpha - \beta) > 0$, тот же результат получается путем сравнения асимптотического поведения $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ при $z \rightarrow \infty$

*) Постоянный множитель $(-1)^{-\alpha}$ введен для удобства последующих вычислений.

***) При $\alpha = \beta = 0$ $u_1 \equiv u_2$.

в формулах (9.3,6) и (9.3,2). Из соображений непрерывности вытекает, что выведенные формулы остаются в силе также для граничного случая $R(\alpha - \beta) = 0$ *). Таким образом, имеет место формула:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} \times \\ &\times F\left(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} \times \\ &\times (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta + 1 - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{z}\right), \quad (9.3,8) \\ &|\arg(-z)| < \pi, \quad \alpha - \beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Если $|z| > 1$, гипергеометрические функции в правой части могут быть заменены соответствующими гипергеометрическими рядами, и функциональное соотношение (9.3,8) приводит к явному выражению гипергеометрической функции в области $|z| > 1, |\arg(-z)| < \pi$. При $\alpha - \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ формула (9.3,8) теряет силу и должна быть заменена равенством (9.4,3). Если преобразовать правую часть (9.3,8) с помощью формул (9.3,1—2), то получим еще одно функциональное соотношение:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \alpha)} (1 - z)^{-\alpha} \times \\ &\times F\left(\alpha, \gamma - \beta, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{1 - z}\right) + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} \times \\ &\times (1 - z)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{1 - z}\right), \quad (9.3,9) \\ &|\arg(1 - z)| < \pi, \quad \alpha - \beta \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Формула (9.3,9) позволяет получить явное представление гипергеометрической функции в области $|z - 1| > 1, |\arg(1 - z)| < \pi$.

Перейдем теперь к выводу формулы, дающей возможность выразить гипергеометрическую функцию через гипергеометрические функции от аргумента $(1 - z)$.

Чтобы вывести эту формулу, заметим, что дифференциальное уравнение (9.3,4) при подстановке $t = 1 - z$

*) Можно показать, на основании рассуждений § 9.1, что $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ представляет собой целую функцию параметров α, β и мероморфную функцию γ с полюсами в точках $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

переходит в уравнение того же вида, с параметрами $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = 1 + \alpha + \beta - \gamma$. Общий интеграл последнего уравнения при $\gamma' \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ может быть представлен в форме (7.2,6), откуда, в частности, вытекает, что должно существовать линейное соотношение вида

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = A_1 F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z) + A_2 (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - z), \quad (9.3,10)$$

$$|\arg(1 - z)| < \pi, \alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Для определения постоянных воспользуемся формулой (9.2,4):

$$\lim_{z \rightarrow 1} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \quad (9.3,11)$$

$$R(\gamma - \alpha - \beta) > 0,$$

а также формулой:

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}, \quad (9.3,12)$$

$$R(\alpha + \beta - \gamma) > 0,$$

которая легко получается из (9.3,3), если умножить обе части последнего равенства на $(1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma}$ и затем устремить z к единице.

Предполагая, что $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, $R(1 - \gamma) > 0$, и переходя к пределу в (9.3,10) один раз при $z \rightarrow 1$, другой — при $z \rightarrow 0$, находим, на основании первой из указанных формул:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}, \\ A_1 &\frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta - \gamma) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 + \beta - \gamma) \Gamma(1 + \alpha - \gamma)} + \\ &+ A_2 \frac{\Gamma(1 + \gamma - \alpha - \beta) \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta) \Gamma(1 - \alpha)} = 1, \end{aligned} \right\} \quad (9.3,13)$$

откуда после несложного вычисления, в ходе которого используется соотношение (1.2,2) теории гамма-функции, следует:

$$A_2 = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}. \quad (9.3,14)$$

Если $R(\gamma - \alpha - \beta) > 0$, $R(1 - \gamma) < 0$, то, умножая равенство (9.3,10) на $z^{\gamma-1}$ и переходя к пределу $z \rightarrow 0$ по формуле (9.3,12), получаем, вместо второго уравнения системы (9.3,13), следующее уравнение:

$$A_1 \frac{\Gamma(1 + \alpha + \beta - \gamma) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} + A_2 \frac{\Gamma(1 + \gamma - \alpha - \beta) \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} = 0, \quad (9.3,15)$$

откуда для постоянной A_2 снова находим ее прежнее значение (9.3,14). Если $R(\gamma - \alpha - \beta) < 0$ и $R(1 - \gamma) > 0$, то для определения постоянных надлежит умножить (9.3,10) на $(1 - z)^{\alpha + \beta - \gamma}$ и перейти к пределу $z \rightarrow 1$ с помощью формулы (9.3,12). Тогда непосредственно определяется значение постоянной A_2 , которое оказывается совпадающим с (9.3,14). Второе уравнение системы (9.3,13) при этом не меняется, поэтому для A_1 также получается прежнее значение. Тот же результат имеет место для случая $R(\gamma - \alpha - \beta) < 0$, $R(1 - \gamma) < 0$, где постоянная A_1 вычисляется с помощью уравнения (9.3,15). Таким образом, во всех случаях, включая по непрерывности и граничные, для постоянных в формуле (9.3,10) получаются одни и те же значения, и искомое функциональное соотношение принимает вид:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)} F(\alpha, \beta, 1 + \alpha + \beta - \gamma, 1 - z) + \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + \beta - \gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} \times$$

$$\times F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, 1 + \gamma - \alpha - \beta, 1 - z), \quad (9.3,16)$$

$$|\arg(1 - z)| < \pi, \alpha + \beta - \gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Формула (9.3,16) дает явное аналитическое представление $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в области $|z - 1| < 1$, $|\arg(1 - z)| < \pi$, так как в этом случае гипергеометрические функции в правой части могут быть заменены соответствующими рядами. При $\alpha + \beta - \gamma = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ представление $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в рассматриваемой области дается формулой (9.4,5).

Формулы (9.3,1—3, 8, 9, 16) представляют собой основные функциональные соотношения для гипергеометрической функции, совокупность которых, за исключением некоторых, отмеченных выше особых случаев, дает полное аналитическое

выражение этой функции в плоскости с разрезом $(1, \infty)$. Кроме этих соотношений, при преобразованиях, связанных с гипергеометрической функцией, часто используются равенства более частного вида, справедливые при наличии определенной связи между ее параметрами. Примером соотношений этого класса может служить формула Куммера

$$F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, z\right) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right), \quad (9.3,17)$$

$$|\arg(1 - z)| < \pi, \quad \alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, -1, -2, \dots$$

Чтобы доказать эту формулу, заметим, что дифференциальное уравнение (9.3,4) с $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ преобразуется при подстановке

$$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1 - z)^{1/2}$$

в уравнение того же типа с новыми параметрами $\alpha' = 2\alpha$, $\beta' = 2\beta$, $\gamma' = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Общий интеграл последнего уравнения при $\alpha + \beta + \frac{1}{2} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ может быть записан в форме (7.2,6), поэтому должно существовать линейное соотношение вида:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = A_1 F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right) + A_2 \left\{ \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2} \right\}^{\frac{1}{2} - \alpha - \beta} \times \\ \times F\left(\frac{1}{2} + \alpha - \beta, \frac{1}{2} + \beta - \alpha, \frac{3}{2} - \alpha - \beta, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right). \quad (9.3,18)$$

Второе слагаемое не является регулярной функцией в окрестности точки $z=0$, в силу чего надлежит выбрать $A_2 = 0$. Полагая затем $z=0$, находим $A_1 = 1$, что приводит к формуле (9.3,17). Справедливость полученного результата для значений $\alpha + \beta + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots$ вытекает из непрерывности.

§ 9.4. Формулы для аналитического продолжения гипергеометрической функции при специальных соотношениях между ее параметрами

Формулы, выведенные в предыдущем параграфе, позволяют осуществить аналитическое продолжение гипергеометрической функции в любую часть плоскости с разрезом $(1, \infty)$, однако некоторые из них теряют смысл при наличии специальных соотношений между параметрами и должны быть заменены соответствующими формулами настоящего параграфа.

Общий метод вывода последующих формул состоит в выполнении надлежащего предельного перехода в исходных формулах § 9.3. Пусть, например, требуется получить аналитическое продолжение в область $|z| > 1$, $|\arg(-z)| < \pi$ гипергеометрической функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, для которой разность $(\alpha - \beta)$ есть нуль или целое число. Общая формула (9.3,8) в рассматриваемом случае неприменима, однако легко показать, что недостающая формула может быть получена из нее путем предельного перехода. В самом деле, заменяя гипергеометрические функции в правой части (9.3,8) соответствующими рядами и воспользовавшись соотношением (1.2,2) теории гамма-функции, мы можем записать это равенство в виде:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{\sin \pi(\beta - \alpha)} \times \\ \times \left\{ \sin \pi(\gamma - \alpha) (-z)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\alpha + 1 - \gamma + k)}{\Gamma(1 + \alpha - \beta + k)k!} \cdot \frac{1}{z^k} - \right. \\ \left. - \sin \pi(\gamma - \beta) (-z)^{-\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\beta + k)\Gamma(\beta + 1 - \gamma + k)}{\Gamma(1 + \beta - \alpha + k)k!} \cdot \frac{1}{z^k} \right\} = \\ = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{1}{\sin \pi(\beta - \alpha)} \{g_1 - g_2\}. \quad (9.4,1)$$

В предложении, что параметры α и $\alpha + 1 - \gamma$ отличны от чисел $0, -1, -2, \dots$, каждая из функций g_i стремится при $\beta \rightarrow \alpha + n$ (n — целое фиксированное положительное

число, $n = 0, 1, 2, \dots$) к определенному пределу, именно:

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha+n} g_1 = (-z)^{-\alpha} \sin \pi(\gamma - \alpha) \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k) \Gamma(\alpha+1-\gamma+k)}{k! \Gamma(1+k-n)} z^{-k} =$$

$$= (-z)^{-\alpha} \sin \pi(\gamma - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n) \Gamma(\alpha+1-\gamma+k+n)}{(k+n)! k!} z^{-k-n},$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \alpha+n} g_2 =$$

$$= (-z)^{-\alpha-n} \sin \pi(\gamma - \alpha - n) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n) \Gamma(\alpha+1-\gamma+k+n)}{k! \Gamma(n+k+1)} z^{-k} =$$

$$= (-z)^{-\alpha} \sin \pi(\gamma - \alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k+n) \Gamma(\alpha+1-\gamma+k+n)}{(k+n)! k!} z^{-k-n},$$

поэтому разность $(g_1 - g_2)$ стремится к нулю, и правая часть формулы (9.4,1) принимает неопределенный вид. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, находим:

$$F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{(-1)^n}{\pi} \left[\frac{\partial g_1}{\partial \beta} - \frac{\partial g_2}{\partial \beta} \right]_{\beta=\alpha+n}, \quad (9.4,2)$$

откуда после вычислений, аналогичных тем, которые были выполнены в § 5.5, получаем*):

$$F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha+n)} \cdot \frac{\sin \pi(\gamma - \alpha)}{\pi} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+k) \Gamma(\alpha+1-\gamma+k) \Gamma(n-k)}{k!} (-z)^{-\alpha-k} + \right.$$

$$\left. + (-z)^{-\alpha-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+k) \Gamma(\alpha+1-\gamma+n+k)}{k! (n+k)!} \times \right.$$

$$\times \left[\ln(-z) + \pi \operatorname{ctg} \pi(\gamma - \alpha) + \psi(1+k) + \psi(1+n+k) - \right.$$

$$\left. - \psi(\alpha+n+k) - \psi(\alpha+1-\gamma+n+k) \right] \frac{1}{z^k} \Big\}, \quad (9.4,3)$$

$|z| > 1, \quad |\arg(-z)| < \pi,$

* Законность почленного дифференцирования рядов g_i по параметру β и предельных переходов под знаком суммы может быть легко обоснована.

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции (§ 1.3), $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$; $\alpha+1-\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$; в случае $n = 0$ первая из сумм должна быть положена равной нулю.

Формула (9.4,3) дает искомое аналитическое продолжение функции $F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z)$ в область $|z| > 1, |\arg(-z)| < \pi$.

Остается рассмотреть те исключительные случаи, когда эта формула неприменима.

Если $\alpha = 0, -1, -2, \dots$, то $F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z)$ сводится к полиному, и необходимость в аналитическом продолжении отпадает.

В случае $\alpha+1-\gamma = 0, -1, -2, \dots$, выполнив преобразование (9.3,3), имеем:

$$F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-2\alpha-n} \times$$

$$\times F(\gamma-\alpha-n, \gamma-\alpha, \gamma, z), \quad (9.4,4)$$

где $\gamma-\alpha-n$ — целое число.

Если $\gamma-\alpha-n$ отрицательно или равно нулю, гипергеометрическая функция в правой части (9.4,4) обращается в полином.

Если $\gamma-\alpha-n$ положительно и $\alpha+n \neq 1, 2, \dots$, для аналитического продолжения гипергеометрической функции в правой части может быть использована формула (9.4,3).

Наконец, в случае, если $\gamma-\alpha-n$ и $\alpha+n$ — целые положительные числа, $F(\alpha, \alpha+n, \gamma, z)$ может быть представлена интегралом типа (9.1,3), в котором подынтегральное выражение будет рациональной функцией t , поэтому гипергеометрическая функция выражается в замкнутой форме через элементарные функции, и в ее аналитическом продолжении нет необходимости.

Случай, когда разность $(\beta-\alpha)$ есть целое отрицательное число, сводится к рассмотренному при помощи соотношения (9.1,6), и, таким образом, данный анализ исчерпывает все возможные комбинации.

Изложенный метод применим к исследованию критических случаев других формул § 9.3.

В частности, мы находим:

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + n, z) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha + k)\Gamma(\beta + k)\Gamma(n - k)}{k!} (-1)^k (1 - z)^k + \right. \\ \left. + (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + n + k)\Gamma(\beta + n + k)}{k!(n + k)!} [\psi(1 + k) + \right. \\ \left. + \psi(1 + n + k) - \psi(\alpha + n + k) - \right. \\ \left. - \psi(\beta + n + k) - \ln(1 - z)] (1 - z)^{n+k} \right\}, \quad (9.4,5)$$

где $|z - 1| < 1$, $|\arg(1 - z)| < \pi$, $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции, $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$; $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$, и в случае $n = 0$ первая из сумм должна быть опущена.

Формула (9.4,5) может быть использована для аналитического продолжения $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ в область $|z - 1| < 1$, $|\arg(1 - z)| < \pi$, при условии, что $\alpha + \beta - \gamma = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), когда общая формула (9.3,16) теряет силу. Ограничение, наложенное на параметры α, β , не является существенным, так как в том случае, когда один из них обращается в нуль или отрицательное целое число, $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ приводится к полиному. Другой критический для формулы (9.3,16) случай, когда $\alpha + \beta - \gamma = n$ ($n = 1, 2, \dots$), сводится к рассмотренному с помощью преобразования (9.3,3).

§ 9.5. Представление различных функций через гипергеометрическую функцию

В настоящем параграфе мы приведем примеры функций, которые могут быть выражены через функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Полученные формулы показывают, насколько широким является рассматриваемый класс функций, и служат хорошей иллюстрацией той роли, которую играет в анализе гипергеометрическая функция.

1. Элементарные функции. Одну из простейших функций, которые выражаются через гипергеометрические, представляет собой биномиальная функция $(1 + z)^\nu$, где ν —

произвольное вещественное или комплексное число и, в случае, если ν не целое, $|\arg(z + 1)| < \pi$.

Предполагая сначала, что $|z| < 1$, имеем:

$$(1 + z)^\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k}{k!} (-z)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_k (\beta)_k}{k! (\beta)_k} (-z)^k \\ (\beta - \text{произвольно}),$$

откуда следует:

$$(1 + z)^\nu = F(-\nu, \beta, \beta, -z) = F(-\nu, 1, 1, -z). \quad (9.5,1)$$

Давая ν различные частные значения, получаем следующие формулы:

$$z^n = F(-n, 1, 1, 1 - z), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$(z + a)^{-n} = a^{-n} F\left(n, 1, 1, -\frac{z}{a}\right),$$

$$(1 + z)^{-1/2} = F\left(\frac{1}{2}, 1, 1, -z\right) \text{ и т. д.}$$

Из (9.5,1) можно вывести одно интересное следствие, если применить преобразование Куммера (9.3,17) к функции

$$F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, 1 - \nu, z\right).$$

Мы находим:

$$F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, 1 - \nu, z\right) = \\ = F\left(-\nu, 1 - \nu, 1 - \nu, \frac{1 - (1 - z)^{1/2}}{2}\right) = \left[\frac{1 + (1 - z)^{1/2}}{2} \right]^\nu. \quad (9.5,2)$$

Другие формулы аналогичного вида были приведены в § 7.3 (7.3,9 и 7.3,22).

Для того чтобы получить представление логарифмической функции $\ln(1 + z)$, где $|\arg(1 + z)| < \pi$, воспользуемся разложением этой функции в круге $|z| < 1$ и преобразуем его в гипергеометрический ряд с помощью соотношения

$$\frac{(a)_k}{(a+1)_k} = \frac{a}{a+k}. \quad (9.5,3)$$

Полагая в этом тождестве $a = 1$, находим:

$$\ln(1 + z) = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k+1} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (1)_k}{k! (2)_k} (-z)^k,$$

откуда следует:

$$\ln(1+z) = zF(1, 1, 2, -z). \quad (9.5,4)$$

Аналогичным образом получаем формулы для обратных круговых функций

$$\operatorname{arctg} z = zF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -z^2\right), \quad (9.5,5)$$

$$\operatorname{arcsin} z = zF\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (9.5,6)$$

и т. д.

2. Эллиптические интегралы. Полные эллиптические интегралы первого и второго рода

$$K(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2} d\varphi, \quad E(z) = \int_0^{\pi/2} (1 - z^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi,$$

где z — комплексное переменное, принадлежащее области $|\arg(1 \pm z)| < \pi$, также могут быть просто представлены через функцию $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$. Предполагая временно $|z| < 1$ и воспользовавшись биномиальным разложением, находим:

$$K(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!} z^{2k} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k \left(\frac{1}{2}\right)_k}{k! (1)_k} z^{2k},$$

откуда:

$$K(z) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right). \quad (9.5,7)$$

Таким же образом имеем:

$$E(z) = \frac{\pi}{2} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right). \quad (9.5,8)$$

Формулы (9.5,7—8) могут быть положены в основу теории эллиптических интегралов, рассматриваемых как функции от модуля z .

3. Сферические функции. Один из наиболее важных классов функций, которые могут быть выражены через гипергеометрические, образуют сферические функции, изученные в гл. VII. Требуемые представления непосредственно получаются из формул (7.12,27) и (7.12,29).

Для общего случая присоединенных функций m -го порядка ($m=0, 1, 2, \dots$) мы имеем:

$$P_v^m(z) = \frac{\Gamma(v+m+1)}{\Gamma(v-m+1)} \cdot \frac{(z^2-1)^{m/2}}{2^m \Gamma(1+m)} \times \\ \times F\left(m-v, m+v+1, m+1, \frac{1-z}{2}\right), \quad (9.5,9)$$

$$Q_v^m(z) = (-1)^m \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(v+m+1)}{2^{v+1} \Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right) z^{v+m+1}} (z^2-1)^{m/2} \times \\ \times F\left(\frac{v+m+2}{2}, \frac{v+m+1}{2}, v+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (9.5,10)$$

где $|\arg(z \pm 1)| < \pi$.

В частности, для полиномов Лежандра (§ 4,2) получаем:

$$P_n(z) = F\left(-n, n+1, 1, \frac{1-z}{2}\right). \quad (9.5,11)$$

Если принять формулы (9.5,9—10) за определение сферических функций, то теория последних может быть весьма просто развита, исходя из соответствующей теории для гипергеометрической функции, что особенно удобно при выводе формул преобразования § 7.6 и их обобщений на случай произвольного m .

§ 9.6. Вырожденная гипергеометрическая функция

Наряду с гипергеометрической функцией $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, важную роль в теории специальных функций играет так называемая вырожденная гипергеометрическая функция $F(\alpha, \gamma, z)$, которая для произвольных значений комплексного переменного z и любых вещественных или комплексных значений параметров α и γ , исключая значения $\gamma=0, -1, -2, \dots$, определяется как сумма ряда

$$F(\alpha, \gamma, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k k!} z^k, \quad (9.6,1)$$

где $(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)$, $(\lambda)_0 = 1$.

Легко видеть, что рассматриваемый ряд сходится при любых значениях α, γ и z , причем в области $|\alpha| \leq A, |\gamma| \leq C$,

$|z| \leq R$ (A , C и R — произвольно большие фиксированные числа) сходимость равномерна по отношению к каждому из переменных. Действительно, полагая $u_k = \frac{(a)_k}{(\gamma)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}$, находим, что для всех достаточно больших k

$$\left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| = \left| \frac{\alpha + k}{\gamma + k} \cdot \frac{z}{k} \right| \leq \frac{k + A}{k - C} \cdot \frac{R}{k} \leq q,$$

где q — некоторая правильная дробь, откуда непосредственно вытекает равномерная сходимость ряда (9.6,1) в рассматриваемой области.

Так как члены ряда суть полиномы относительно α и z и рациональные функции γ , то, на основании теоремы Вейерштрасса, заключаем, что вырожденная гипергеометрическая функция $F(\alpha, \gamma, z)$, рассматриваемая как функция каждого из переменных при фиксированных значениях двух остальных, представляет собой целую функцию z и α и мероморфную функцию γ с полюсами в точках $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Вырожденная гипергеометрическая функция является частным решением линейного дифференциального уравнения

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0, \quad (9.6,2)$$

при условии, что параметр $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$. Действительно, полагая $u = u_1 = F(\alpha, \gamma, z)$ и обозначая левую часть уравнения через $l(u)$, имеем:

$$\begin{aligned} l(u_1) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k(k-1)(a)_k}{(\gamma)_k k!} z^{k-1} - (\gamma - z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(a)_k}{(\gamma)_k k!} z^{k-1} - \\ &- \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(\gamma)_k k!} z^k = \left[\gamma \frac{(a)_1}{(\gamma)_1} - \alpha \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(\gamma)_k k!} \times \\ &\times \left[\frac{k(a)_{k+1}(\gamma)_k}{(a)_k(\gamma)_{k+1}} + \frac{\gamma(a)_{k+1}(\gamma)_k}{(\gamma)_{k+1}(a)_k} - k - \alpha \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k z^k}{(\gamma)_k k!} \left[k \frac{\alpha + k}{\gamma + k} + \gamma \frac{\alpha + k}{\gamma + k} - k - \alpha \right] \equiv 0. \end{aligned}$$

Чтобы получить второе линейно независимое решение рассматриваемого уравнения, заметим, что при подстановке

$u = z^{1-\gamma}v$ это уравнение преобразуется в уравнение того же вида

$$zv'' + (\gamma' - z)v' - \alpha'v = 0,$$

с новыми значениями параметров $\alpha' = 1 + \alpha - \gamma$, $\gamma' = 2 - \gamma$; поэтому при $\gamma \neq 2, 3, \dots$ функция

$$u = u_2 = z^{1-\gamma}F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z)$$

также есть решение уравнения (9.6,2). При $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ оба решения u_1 и u_2 существуют одновременно и линейно независимы между собой*), поэтому общий интеграл дифференциального уравнения может быть представлен в форме

$$u = AF(\alpha, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma}F(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma, z). \quad (9.6,3)$$

Если параметры вырожденной гипергеометрической функции $F(\alpha, \gamma, z)$ удовлетворяют условиям $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$, эта функция допускает простое интегральное представление, которое можно получить, заменив отношение $\frac{(a)_k}{(\gamma)_k}$ в (9.6,1) интегралом (1.5,6):

$$\frac{(a)_k}{(\gamma)_k} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1+k} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt, \quad (9.6,4)$$

$$R(\gamma) > R(\alpha) > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Мы находим тогда**)

$$\begin{aligned} F(\alpha, \gamma, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1+k} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt = \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} dt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(zt)^k}{k!}, \end{aligned}$$

или

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{zt} dt, \quad (9.6,5)$$

$$R(\gamma) > R(\alpha) > 0.$$

*) При $\gamma = 1$ будет $u_1 \equiv u_2$.

**) Законность перестановки следует из легко доказываемой абсолютной сходимости.

Из интегрального представления (9.6,5) можно вывести одно интересное функциональное соотношение, которому удовлетворяет функция $F(\alpha, \gamma, z)$.

Чтобы получить это соотношение, предположим сначала, что условия применимости формулы (9.6,5) выполнены, и произведем в интеграле замену переменной, положив $t = 1 - s$. Формула (9.6,5) принимает тогда вид:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma) e^z}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 s^{\gamma - \alpha - 1} (1 - s)^{\alpha - 1} e^{-zs} ds, \quad (9.6,6)$$

откуда, так как $R(\gamma) > R(\gamma - \alpha) > 0$, следует:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (9.6,7)$$

Соотношение (9.6,7) доказано пока в предположении, что $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$, однако, за вычетом произвольно малой окрестности точек $\gamma = 0, -1, -2, \dots$, левая и правая части рассматриваемой формулы представляют собой регулярные функции комплексных переменных α и γ и, согласно принципу аналитического продолжения, полученное равенство сохраняет силу при произвольных значениях параметров α и γ , исключая $\gamma = 0, -1, -2, \dots$.

Вырожденная гипергеометрическая функция удовлетворяет рекуррентным соотношениям:

$$F(\alpha, \gamma, z) = F(\alpha + 1, \gamma, z) - \frac{z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.6,8)$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z) + \frac{\gamma - z}{\gamma} F(\alpha, \gamma + 1, z), \quad (9.6,9)$$

$$(\alpha + z) F(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = (\alpha - \gamma) F(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma F(\alpha + 1, \gamma, z), \quad (9.6,10)$$

$$\alpha \gamma F(\alpha + 1, \gamma, z) = \gamma(\alpha + z) F(\alpha, \gamma, z) - z(\gamma - \alpha) F(\alpha, \gamma + 1, z), \quad (9.6,11)$$

$$\alpha F(\alpha + 1, \gamma, z) = (z + 2\alpha - \gamma) F(\alpha, \gamma, z) + (\gamma - \alpha) F(\alpha - 1, \gamma, z), \quad (9.6,12)$$

$$\frac{\gamma - \alpha}{\gamma} z F(\alpha, \gamma + 1, z) = (z + \gamma - 1) F(\alpha, \gamma, z) + (1 - \gamma) F(\alpha, \gamma - 1, z), \quad (9.6,13)$$

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\gamma - z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z) + \frac{\alpha + 1}{\gamma(\gamma + 1)} z F(\alpha + 2, \gamma + 2, z), \quad (9.6,14)$$

полезным, в частности, при составлении таблиц $F(\alpha, \gamma, z)$, а также соотношению:

$$\frac{d}{dz} F(\alpha, \gamma, z) = \frac{z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (9.6,15)$$

которые легко проверяются путем подстановки ряда (9.6,1) и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях z в левой и правой частях рассматриваемых равенств.

Функция $F(\alpha, \gamma, z)$ весьма часто встречается в анализе, причем главное ее значение состоит в том, что многие специальные функции могут рассматриваться как ее частные случаи (§ 9.8), что в значительной мере облегчает построение теории этих функций.

§ 9.7. Асимптотическое представление вырожденной гипергеометрической функции при больших значениях ее аргумента

Формулы, дающие асимптотическое представление $F(\alpha, \gamma, z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ в определенном секторе плоскости комплексного переменного, могут быть выведены, исходя из интегральных представлений для этой функции. Чтобы получить одно из таких представлений, рассмотрим интеграл

$$\int_C t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\gamma - \alpha - 1} e^{zt} dt,$$

взятый по замкнутому контуру (C) (рис. 31), где ветвь многозначной функции $f(t) = t^{\alpha - 1} (1 - t)^{\gamma - \alpha - 1}$ определена требованием, что $\arg f|_{0A} = 0$. Подинтегральное выражение есть регулярная функция в области, ограниченной контуром (C), поэтому, по теореме Коши, значение интеграла равно нулю.

Предположим временно, что $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ и $\arg z = \frac{\pi}{2}$, т. е. $(-iz) > 0$. При выполнении этих условий интегралы, взятые по дугам малых окружностей, включающим

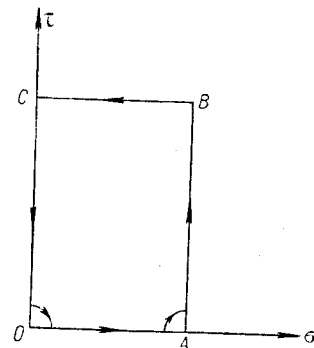


Рис. 31.

точки O и A , а также интеграл по отрезку BC исчезают в пределе, когда радиусы окружностей стремятся к нулю, а $|AB| = |OC| \rightarrow \infty$, и мы получим:

$$\int_0^1 \sigma^{\alpha-1} (1-\sigma)^{\gamma-\alpha-1} e^{z\sigma} d\sigma + ie^z \int_0^\infty (1+i\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times (-i\tau)^{\gamma-\alpha-1} e^{iz\tau} d\tau + i \int_0^\infty (i\tau)^{\alpha-1} (1-i\tau)^{\gamma-\alpha-1} e^{i\tau z} d\tau = 0.$$

Если ввести новое переменное интегрирования $s = (-iz)\tau$ и воспользоваться (9.6,5), то из последнего равенства вытекает следующее интегральное представление:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \left\{ e^z z^{\alpha-\gamma} \int_0^\infty s^{\gamma-\alpha-1} \times \right. \\ \times \left(1 - \frac{s}{z}\right)^{\alpha-1} e^{-s} ds + e^{iz\alpha} z^{-\alpha} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \left(1 + \frac{s}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1} e^{-s} ds. \quad (9.7,1)$$

В формуле (9.7,1) $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ и, кроме того, предположено, что $(-iz) > 0$. Легко показать, что последнее допущение не является необходимым, и выведенная формула остается справедливой для любых комплексных z с положительной мнимой частью. Действительно, для таких z обе стороны рассматриваемого равенства представляют собой регулярные функции комплексного переменного z , и требуемый результат непосредственно вытекает из принципа аналитического продолжения *).

Пользуясь полученным интегральным представлением, можно вывести асимптотическую формулу для $F(\alpha, \gamma, z)$, пригодную в секторе $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, δ — произвольно малое положительное число.

Предположим, что условие $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ выполнено, заменим в (9.7,1) множители $\left(1 - \frac{s}{z}\right)^{\alpha-1}$ и $\left(1 + \frac{s}{z}\right)^{\gamma-\alpha-1}$

*) Особыми линиями интегралов в правой части (9.7,1) являются множества точек $z = \pm s$, где $0 \leq s < \infty$.

их биномиальными разложениями *) и выполним почленное интегрирование. Мы получим тогда на основании (1.5,1):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma-\alpha+k)}{k! \Gamma(\alpha-k)} z^{-k} + R_n^{(1)}(z) \right\} + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{i\pi\alpha} z^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k! \Gamma(\gamma-\alpha-k)} z^{-k} + R_n^{(2)}(z) \right\}, \quad (9.7,2)$$

где значения остаточных членов $R_n^{(i)}(z)$ могут быть выражены через двойные интегралы:

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{(-1)^{n+1} z^{-n-1}}{n! \Gamma(\alpha-n-1)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\gamma-\alpha+n} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n \left(1 - \frac{s}{z} t\right)^{\alpha-n-2} dt, \\ R_n^{(2)}(z) = \frac{z^{-n-1}}{n! \Gamma(\gamma-\alpha-n-1)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha+n} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n \left(1 + \frac{s}{z} t\right)^{\gamma-\alpha-n-2} dt. \quad (9.7,3)$$

При условии, что $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, комплексное переменное $Z = \frac{st}{z}$ принадлежит области $-(\pi - \delta) \leq \arg Z \leq -\delta$, и из геометрических соображений следует, что $|1 \pm Z| \geq \sin \delta$, а $|\arg(1 \pm Z)| < \pi$.

Предположим, что число n выбрано настолько большим, что $n+2 \geq R(\alpha)$ и $n+2 \geq R(\gamma-\alpha)$. Тогда, принимая во

*) См. примечание на стр. 168.

внимание сделанное выше замечание и оценивая интегралы (9.7,3) по модулю, находим*):

$$|R_n^{(1)}(z)| \leq \frac{|z|^{-n-1}}{n! |\Gamma(\alpha - n - 1)|} \int_0^\infty e^{-s} s^{R(\gamma - \alpha) + n} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n (\sin \delta)^{R(\alpha) - n - 2} e^{\pi |I(\alpha)|} dt, \\ |R_n^{(2)}(z)| \leq \frac{|z|^{-n-1}}{n! |\Gamma(\gamma - \alpha - n - 1)|} \int_0^\infty e^{-s} s^{R(\alpha) + n} ds \times \\ \times \int_0^1 (1-t)^n (\sin \delta)^{R(\gamma - \alpha) - n - 2} e^{\pi |I(\gamma - \alpha)|} dt,$$

откуда, после простых вычислений, следует:

$$\left. \begin{aligned} |R_n^{(1)}(z)| &\leq \frac{\Gamma(R(\gamma - \alpha) + n + 1)}{(n + 1)! |\Gamma(\alpha - n - 1)|} (\sin \delta)^{R(\alpha) - n - 2} \times \\ &\quad \times e^{\pi |I(\alpha)|} |z|^{-n-1}, \\ |R_n^{(2)}(z)| &\leq \frac{\Gamma(R(\alpha) + n + 1)}{(n + 1)! |\Gamma(\gamma - \alpha - n - 1)|} \times \\ &\quad \times (\sin \delta)^{R(\gamma - \alpha) - n - 2} e^{\pi |I(\gamma - \alpha)|} |z|^{-n-1}. \end{aligned} \right\} (9.7,4)$$

Полученные оценки показывают, что формула (9.7,2) может быть записана в виде:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} e^z z^{-(\gamma - \alpha)} \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{k! \Gamma(\alpha - k)} z^{-k} + O(z^{-n-1}) \right\} + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{i\pi\alpha} z^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k! \Gamma(\gamma - \alpha - k)} z^{-k} + O(z^{-n-1}) \right\}, (9.7,5)$$

причем предполагается, что $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, $|z|$ — велико, $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ и $n + 2 \geq R(\alpha)$, $n + 2 \geq R(\gamma - \alpha)$.

*) Если a и b — комплексные числа, то:
 $|a^b| = |a|^{R(b)} e^{-I(b)\arg a}$.

Покажем, что последнее условие не является существенным и формула (9.7,5) справедлива при любом n . Действительно, пусть n таково, что одно или оба из чисел $R(\alpha)$ и $R(\gamma - \alpha)$ больше, чем $(n + 2)$. Очевидно, что всегда можно найти такое целое $m > n$, чтобы $(m + 2)$ было больше любого из рассматриваемых чисел, и тогда, согласно доказанному, $F(\alpha, \gamma, z)$ может быть представлено формулой вида (9.7,5), где n заменено на m . Но каждое из выражений в фигурных скобках последней формулы имеет вид:

$$\sum_{k=0}^m \dots + O(z^{-m-1}) = \sum_{k=0}^n \dots + \sum_{k=n+1}^m \dots + O(z^{-m-1}) = \\ = \sum_{k=0}^n \dots + O(z^{-n-1}),$$

и мы снова приходим к прежней формуле (9.7,5). Докажем теперь, что условие $R(\gamma) > R(\alpha) > 0$ также не является необходимым, для чего воспользуемся рекуррентными соотношениями (9.6, 13—14). Предположим, что вместо последнего условия удовлетворяется только более слабое условие $R(\gamma) > R(\alpha) > -1$. Тогда формула (9.7,5) будет применима к каждой из гипергеометрических функций, стоящих в правой части равенства (9.6,14)*):

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\gamma - z}{\gamma} F(\alpha + 1, \gamma + 1, z) + \\ + \frac{z(\alpha + 1)}{\gamma(\gamma + 1)} F(\alpha + 2, \gamma + 2, z), (9.7,6)$$

и, воспользовавшись этой формулой, мы можем представить $F(\alpha, \gamma, z)$ в виде:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} e^z z^{-(\gamma - \alpha)} P + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{i\pi\alpha} z^{-\alpha} Q,$$

*) Заметим, что это равенство является следствием (9.6,2) и (9.6,15).

где, например,

$$\begin{aligned}
 P &= (\gamma - z) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{k! \Gamma(1 + \alpha - k)} z^{-k} + \\
 &+ z(\alpha + 1) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{k! \Gamma(2 + \alpha - k)} z^{-k} + O(z^{-n-1}) = \\
 &= \gamma \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{k! \Gamma(1 + \alpha - k)} z^{-k} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{(k-1)! \Gamma(2 + \alpha - k)} z^{-(k-1)} + O(z^{-n-1}) = \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(\gamma - \alpha + k)}{k! \Gamma(\alpha - k)} z^{-k} + O(z^{-n-1}).
 \end{aligned}$$

Таким же образом убеждаемся, что

$$Q = \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k! \Gamma(\gamma - \alpha + k)} z^{-k} + O(z^{-n-1});$$

следовательно, формула (9.7,5) верна при условии $R(\gamma) > R(\alpha) > -1$. Повторяя описанный процесс, мы по индукции докажем справедливость рассматриваемой формулы при условии $R(\gamma) > R(\alpha)$, более слабом, чем первоначальное. С помощью аналогичных рассуждений, опирающихся на рекуррентную формулу, вытекающую из (9.6,13), если заменить в ней γ на $(\gamma + 1)$,

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\gamma + z}{\gamma} F(\alpha, \gamma + 1, z) - \frac{\gamma - \alpha + 1}{\gamma(\gamma + 1)} z F(\alpha, \gamma + 2, z), \quad (9.7,7)$$

мы можем освободиться также от этого последнего условия. Таким образом, формула (9.7,5) доказана при произвольных α, γ и n .

Воспользовавшись соотношением (1.2,2) теории гамма-функции, мы можем после некоторых преобразований за-

писать полученное асимптотическое представление (9.7,5) в виде:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{-(\gamma-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\alpha)_k}{k! z^k} + O(z^{-n-1}) \right\} + \\
 &+ \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{i\pi\alpha} z^{-\alpha} \times \\
 &\times \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(\alpha)_k (1+\alpha-\gamma)_k}{k! z^k} + O(z^{-n-1}) \right\}, \quad (9.7,8)
 \end{aligned}$$

где $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ ($\delta > 0$), $|z|$ — велико и символ $(\lambda)_k$ обозначает величину

$$(\lambda)_k = \frac{\Gamma(\lambda + k)}{\Gamma(\lambda)} = \lambda(\lambda + 1) \dots (\lambda + k - 1), \quad (\lambda)_0 = 1.$$

Соответствующая формула для сектора $-(\pi - \delta) \leq \arg z \leq -\delta$ может быть выведена из (9.7,8) с помощью преобразования (9.6,7). Мы имеем:

$$F(\alpha, \gamma, z) = e^z F(\gamma - \alpha, \gamma, -z),$$

откуда, применяя к функции, стоящей в правой части, формулу (9.7,8), находим:

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(\alpha)_k (1+\alpha-\gamma)_k}{k! z^k} + \right. \\
 &+ \left. O(z^{-n-1}) \right\} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{i\pi(\gamma-\alpha)} e^z (-z)^{-(\gamma-\alpha)} \times \\
 &\times \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\alpha)_k}{k! z^k} + O(z^{-n-1}) \right\}
 \end{aligned}$$

или, так как

$$(-z)^{-\alpha} = e^{-i\pi\alpha} z^{-\alpha}, \quad (-z)^{-(\gamma-\alpha)} = e^{-i\pi(\gamma-\alpha)} z^{-(\gamma-\alpha)},$$

$$\begin{aligned}
 F(\alpha, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{-(\gamma-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-\alpha)_k (1-\alpha)_k}{k! z^k} + \right. \\
 &+ \left. O(z^{-n-1}) \right\} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{-i\pi\alpha} z^{-\alpha} \times \\
 &\times \left\{ \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(\alpha)_k (1+\alpha-\gamma)_k}{k! z^k} + O(z^{-n-1}) \right\}, \quad (9.7,9)
 \end{aligned}$$

где $-(\pi - \delta) \leq \arg z \leq -\delta$, $|z|$ — велико.

Асимптотическое представление $F(\alpha, \gamma, z)$ для сектора $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$ может быть получено аналогичным образом и имеет вид:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{-(\gamma-\alpha)} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma-z)_k (1-z)_k}{k! z^k} + O(z^{-n-1}) \right\}, \quad (9.7,10)$$

где $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, $|z|$ — велико и $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$

Последний результат не противоречит ранее выведенным формулам (9.7, 8—9), так как в общей с (9.7,10) зоне вторые слагаемые этих формул будут малы, и данные асимптотические представления фактически совпадают между собой.

§ 9.8. Представление различных функций через вырожденную гипергеометрическую функцию

Как уже отмечалось, многие элементарные и специальные функции, встречающиеся в анализе, могут быть просто выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \gamma, z)$. Мы имеем, например,

$$F(\alpha, \alpha, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \equiv e^z, \quad F(1, 2, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$F(-2, 1, z) = 1 - 2z + \frac{1}{2} z^2 \quad \text{и т. д.}$$

В настоящем параграфе мы рассмотрим представление через вырожденную гипергеометрическую функцию специальных функций, изученных в гл. II, III, IV, V.

1. Интеграл вероятности. Исходя из определения интеграла вероятности $\Phi(z)$ в форме степенного ряда (2.1,2) и принимая во внимание соотношение

$$\frac{1}{2k+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\left(\frac{3}{2}\right)_k},$$

имеем:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{k! (2k+1)} = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k! \left(\frac{3}{2}\right)_k} (-z^2)^k,$$

откуда

$$\Phi(z) = \frac{2z}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -z^2\right). \quad (9.8,1)$$

2. Функция $F(z)$. Функция $F(z)$, связанная с интегралом вероятности от мнимого аргумента (§ 2.3), также просто выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию. Действительно, замечая, что $\frac{1 \cdot 3 \dots (2k+1)}{2^k} = \left(\frac{3}{2}\right)_k$, $k! = (1)_k$, мы получаем из (2.3,4):

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k z^{2k+1}}{1 \cdot 3 \dots (2k+1)} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1)_k (-z^2)^k}{k! \left(\frac{3}{2}\right)_k},$$

откуда

$$F(z) = z F\left(1, \frac{3}{2}, -z^2\right). \quad (9.8,2)$$

3. Интегралы Френеля. Из связи интегралов Френеля с интегралом вероятности (2.4,6) и формулы (9.8,1) находим:

$$C(z) = \frac{z}{2} \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i\pi z^2}{2}\right) + F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{i\pi z^2}{2}\right) \right], \quad (9.8,3)$$

$$S(z) = \frac{z}{2i} \left[F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{i\pi z^2}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{i\pi z^2}{2}\right) \right]. \quad (9.8,4)$$

4. Интегральная показательная функция. Исходя из равенства (3.1,4) и воспользовавшись результатом примера, данного в начале настоящего параграфа, имеем:

$$\text{Ei}(z) = \gamma + \ln(-z) + \int_0^z F(1, 2, t) dt.$$

Далее, из (9.6,15) следует, что

$$\int_0^z F(\alpha + 1, 2, t) dt = \frac{F(\alpha, 1, z) - 1}{\alpha},$$

откуда, переходя к пределу $\alpha \rightarrow 0$, получаем:

$$\text{Ei}(z) = \gamma + \ln(-z) + \left\{ \frac{\partial F(\alpha, 1, z)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0}. \quad (9.8,5)$$

5. Интегральный синус и интегральный косинус. Если обозначить через $g(z)$ функцию, определенную равенством

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!k} = \int_0^z \frac{e^t - 1}{t} dt = \left\{ \frac{\partial F(\alpha, 1, z)}{\partial \alpha} \right\}_{\alpha=0},$$

то формулы (3.3,3—4) могут быть записаны в виде:

$$\text{Si}(z) = \frac{1}{2i} [g(iz) - g(-iz)],$$

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \frac{1}{2} [g(iz) + g(-iz)],$$

и искомое представление рассматриваемых функций через вырожденную гипергеометрическую функцию будет:

$$\text{Si}(z) = \frac{1}{2i} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, 1, iz) - \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, 1, -iz) \right]_{\alpha=0}, \quad (9.8,6)$$

$$\text{Ci}(z) = \gamma + \ln z + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, 1, iz) + \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, 1, -iz) \right]_{\alpha=0}. \quad (9.8,7)$$

6. Интегральный логарифм. Из (3.4,2) и (9.8,5) получаем непосредственно:

$$\text{li}(z) = \gamma + \ln(-\ln z) + \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} F(\alpha, 1, \ln z) \right\}_{\alpha=0}. \quad (9.8,8)$$

7. Полиномы Эрмита. Из (4.9,2) следует, что четный полином Эрмита может быть представлен в форме:

$$\begin{aligned} H_{2n}(z) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(2n)!}{k!(2n-2k)!} (2z)^{2n-2k} = \\ &= (2n)! (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2z)^{2k}}{(n-k)!(2k)!} = \\ &= \frac{(2n)! (-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(2k)!} (2z)^{2k} = \\ &= \frac{(2n)!}{n!} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (2z)^{2k}}{(2k)!}, \end{aligned}$$

или, так как на основании формулы удвоения гамма-функции (1.2,3), $(2k)! = 2^{2k} \left(\frac{1}{2}\right)_k k!$, то

$$H_{2n}(z) = \frac{(2n)!}{n!} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (z^2)^k}{k! \left(\frac{1}{2}\right)_k},$$

откуда вытекает:

$$H_{2n}(z) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} F\left(-n, \frac{1}{2}, z^2\right). \quad (9.8,9)$$

Аналогичным образом для нечетного полинома Эрмита получается формула:

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} 2z F\left(-n, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (9.8,10)$$

8. Полиномы Лагерра. Полиномы Лагерра также могут быть выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию. Принимая во внимание, что

$$\frac{(-1)^k}{(n-k)!} = \frac{(-n)_k}{n!},$$

находим из (4.17,2):

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k z^k}{k! (\alpha+1)_k},$$

откуда

$$L_n^\alpha(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} F(-n, \alpha+1, z). \quad (9.8,11)$$

9. Цилиндрические функции. Чтобы выразить функцию Бесселя $J_\nu(z)$ через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \gamma, z)$, предположим сначала, что $R(\nu) > -\frac{1}{2}$, и воспользуемся интегральным представлением (5.10,3).

Вводя новое переменное интегрирования $s = \frac{1}{2}(1+t)$, получаем:

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{itz} dt = \\ &= \frac{2^{2\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_0^1 s^{\nu-1/2} (1-s)^{\nu-1/2} e^{2isz} ds, \end{aligned}$$

откуда, на основании (9.6,5),

$$J_\nu(z) = \frac{2^{2\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu e^{-iz} \Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2iz\right),$$

или, если воспользоваться для упрощения формулой удвоения гамма-функции (1.2,3),

$$\begin{aligned} J_\nu(z) &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{-iz} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2iz\right) = \\ &= \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} e^{iz} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, -2iz\right). \quad (9.8,12) \end{aligned}$$

С помощью принципа аналитического продолжения легко показать, что результат справедлив при любых ν .

Аналогичные представления для других цилиндрических функций получаются из (9.8,12) посредством соотношений (5.4,5—6), (5.6,4), (5.7,2—6). Например, мы имеем:

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \frac{e^z \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, -2z\right) = \\ &= \frac{e^{-z} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} F\left(\nu+\frac{1}{2}, 2\nu+1, 2z\right), \quad (9.8,13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} e^{-z} \left[\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu/2}}{\Gamma(1-\nu)} F\left(\frac{1}{2}-\nu, 1-2\nu, 2z\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu/2}}{\Gamma(1+\nu)} F\left(\frac{1}{2}+\nu, 1+2\nu, 2z\right) \right], \quad (9.8,14) \end{aligned}$$

и т. д.

Введенные формулы в достаточной мере характеризуют значение функции $F(\alpha, \gamma, z)$ и могут быть использованы для наиболее компактного построения теории специальных функций. Вместе с формулами § 9.5 они показывают, что значительное число функций, встречающихся в приложениях, может быть выражено через гипергеометрические функции, рассмотренные в настоящей главе*).

§ 9.9. Таблицы гипергеометрических функций

Составление полных таблиц функции $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$, зависящей от четырех переменных, требует громадной затраты труда, и подобные таблицы должны иметь чрезмерно большой

*) В литературе, наряду с вырожденной гипергеометрической функцией $F(\alpha, \gamma, z)$, рассматривается функция Уиттекера $W_{\lambda, \mu}(z)$, связанная с первой соотношением:

$$\begin{aligned} W_{\lambda, \mu}(z) &= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\lambda\right)} z^{\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(\mu-\lambda+\frac{1}{2}, 2\mu+1, z\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\lambda\right)} z^{-\mu+1/2} e^{-z/2} F\left(-\mu-\lambda+\frac{1}{2}, -2\mu+1, z\right), \end{aligned}$$

введение которой позволяет упростить некоторые из формул настоящего параграфа. (См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон [1], гл. 16).

объем; поэтому в настоящее время табулированы лишь отдельные частные случаи, относящиеся к специальным значениям параметров*).

Из таблиц вырожденной гипергеометрической функции $F(\alpha, \gamma, z)$ могут быть упомянуты таблицы Вебба и Эйри (H. A. Webb and J. K. Airey), Phil. Mag. (6), 36 (1918), где приведены четырехзначные значения $F(\alpha, \gamma, x)$ для $x=1$ (1) 6 (2) 10, $\alpha=-3$ (0,5) 4, $\gamma=1$ (1) 7, а также графики этой функции.

Упражнения

1. С помощью преобразования Куммера (9.3,17) и результата (9.2,4), доказать, что

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha + \beta + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)}.$$

2. Показать, что при $\gamma=1$ общий интеграл гипергеометрического дифференциального уравнения

$$z(1-z)u'' + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\}u' - \alpha\beta u = 0$$

может быть представлен в форме

$$u = AF(\alpha, \beta, 1, z) + Bg(\alpha, \beta, 1, z),$$

где $g(\alpha, \beta, 1, z) = F(\alpha, \beta, 1, z) \ln z +$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k!^2} [\psi(k+\alpha) - \psi(\alpha) + \psi(k+\beta) - \psi(\beta) + 2\psi(k+1) - 2\psi(1)] z^k,$$

$\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Аналогичные результаты имеют место при других целых положительных значениях параметра γ **).

*) См., например, Флетчер, Миллер и Розенхед [1].

Заметим, что создание счетных электронных машин позволяет поставить вопрос о проведении систематической работы по табулированию гипергеометрических и других функций, встречающихся в приложениях.

**) Рыжик и Градштейн [1].

Для вывода рассматривать случай $\gamma=1$ как предельный ($\gamma \rightarrow 1$) и использовать метод § 5.4—5, примененный для получения второго интеграла уравнения Бесселя при целом $\nu=n$.

3. Показать, что при $\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)$ общий интеграл гипергеометрического уравнения будет

$$u = AF\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, z\right) + BF\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, 1 - z\right),$$

при условии, что α, β и $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

Указание. Преобразовать гипергеометрическое дифференциальное уравнение с помощью подстановки $1 - z = t$.

4. Путем почленного интегрирования установить справедливость следующих формул:

$$F(\alpha, \beta, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(c-\gamma)} \int_0^1 F(\alpha, \beta, \gamma, zt) t^{\gamma-1} (1-t)^{c-\gamma-1} dt;$$

$$R(c) > R(\gamma) > 0,$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1, z) = \gamma \int_0^1 F(\alpha, \beta, \gamma, zt) t^{\gamma-1} dt; \quad R(\gamma) > 0.$$

5. Получить асимптотическую формулу:

$$F(\alpha, \beta, \alpha + \beta, x) \approx \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \ln \frac{1}{1-x}, \quad x \rightarrow 1.$$

Указание. Воспользоваться формулой (9.4,5).

6. Показать, что общий интеграл дифференциального уравнения

$$zu'' + (\gamma - z)u' - \alpha u = 0$$

для вырожденной гипергеометрической функции может быть при $\gamma=1$ представлен в форме

$$u = AF(\alpha, 1, z) + Bg(\alpha, 1, z),$$

где

$$g(\alpha, 1, z) = F(\alpha, 1, z) \ln z +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{k!^2} [\psi(\alpha + k) - \psi(\alpha) - 2\psi(k+1) + 2\psi(1)],$$

$\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции*).

7. Получить интегральное представление для вырожденной гипергеометрической функции:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{zz} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha} J_{\gamma-1}(2\sqrt{zt}) dt,$$

$$R(\gamma - \alpha) > 0, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

*) По поводу соответствующих формул для $\gamma=2, 3, \dots$ см., например, цитированный выше справочник Рыжика и Градштейна [1]. Метод вывода — такой же, как в примере 2.

Указание. Разложить функцию Бесселя в степенной ряд и проинтегрировать почленно.

8. Показать, что преобразование Лапласа от $F(\alpha, \gamma, x)$

$$\overline{F(\alpha, \gamma, x)} = \frac{1}{\rho} F\left(\alpha, 1, \gamma, \frac{1}{\rho}\right).$$

9. Проверить, что функция Уиттекера $W_{\lambda, \mu}(z)$ есть частное решение дифференциального уравнения

$$u'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right) u = 0.$$

10. Получить интегральное представление:

$$W_{\lambda, \mu}(z) = \frac{z^\lambda e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty t^{\mu - \lambda - 1/2} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{\mu + \lambda - 1/2} dt,$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \Re\left(\mu - \lambda + \frac{1}{2}\right) > 0$$

(Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон [1], гл. 16).

11. Воспользовавшись результатом примера 10, вывести асимптотическую формулу:

$$W_{\lambda, \mu}(z) \approx e^{-z/2} z^\lambda, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta.$$

12. На основании результатов § 9.8 получить следующие представления различных специальных функций через функцию Уиттекера:

$$1 - \Phi(z) = e^{-\frac{z^2}{2}} (\pi z)^{-1/2} W_{-1/4, 1/4}(z^2);$$

$$\text{Ei}(z) = -e^{-\frac{z}{2}} (-z)^{-1/2} W_{-1/2, 0}(-z);$$

$$\text{li}(z) = -z^{1/2} (-\ln z)^{-1/2} W_{-1/2, 0}(-\ln z);$$

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} W_{0, \nu}(2z).$$

Указание. Воспользоваться связью между функцией Уиттекера и вырожденной гипергеометрической функцией (стр. 347).

ЛИТЕРАТУРА к ГЛАВЕ IX

Гаусс [1], [2], Куммер [1], Риман [1], Уиттекер и Ватсон [1], Барнс [2], Вэбб и Эйри [1], Уиттекер [1].
Справочники: Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1], Маркус и Оберхеттингер [1].

ГЛАВА X

ФУНКЦИИ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

§ 10.1. Разделение переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах

Краевые задачи математической физики, относящиеся к области, ограниченной поверхностью бесконечного параболического цилиндра, могут быть решены при помощи метода разделения переменных, если ввести систему параболических координат, для которых поверхность цилиндра является одной из координатных поверхностей.

Пусть (x, y, z) будет система прямоугольных координат, ось Z которой параллельна образующей цилиндра, ось X совпадает с осью симметрии параболы, получающейся при пересечении цилиндра какой-либо плоскостью, перпендикулярной оси Z , и начало координат помещено в фокусе этой параболы. Система пространственных параболических координат (α, β, z) определяется в таком случае при помощи соотношений:

$$x = \frac{c}{2}(\alpha^2 - \beta^2), \quad y = c\alpha\beta, \quad z = z, \quad (10.1,1)$$

где c — размерный множитель, $-\infty < \alpha < \infty$, $0 \leq \beta < \infty$, $-\infty < z < \infty$.

Координатные поверхности в данной системе координат суть параболические цилиндры $\alpha = \text{const}$:

$$y^2 = -2c\alpha^2 \left(x - \frac{c\alpha^2}{2}\right), \quad (10.1,2)$$

параболические цилиндры $\beta = \text{const}$, ортогональные к первым:

$$y^2 = 2c\beta^2 \left(x + \frac{c\beta^2}{2}\right), \quad (10.1,3)$$

и плоскости $z = \text{const}$ (рис. 32). В частности, если выбрать величины c и β_0 таким образом, чтобы произведение $c\beta_0^2$

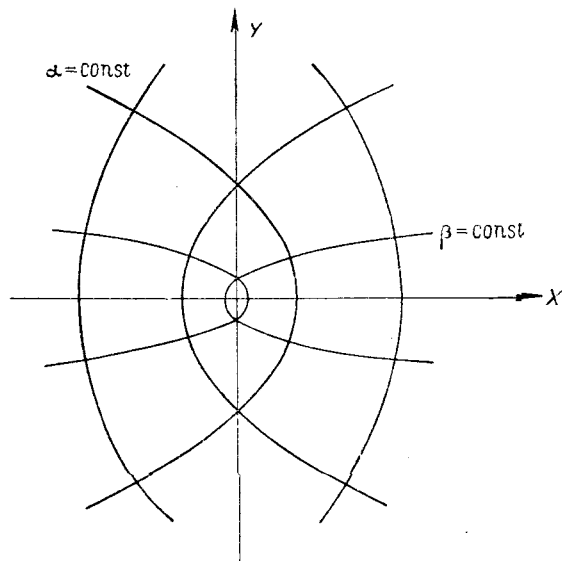


Рис. 32.

равнялось заданной величине p , то уравнение параболического цилиндра

$$y^2 = 2p \left(x + \frac{p}{2} \right) \quad (10.1,4)$$

в новых переменных принимает вид $\beta = \beta_0$, причем области, лежащей внутри цилиндра, будет соответствовать совокупность значений $0 \leq \beta < \beta_0$, области вне цилиндра — совокупность значений $\beta_0 < \beta < \infty$. Выражение для квадрата линейного элемента в рассматриваемой системе криволинейных координат имеет форму:

$$ds^2 = c^2 (\alpha^2 + \beta^2) (d\alpha^2 + d\beta^2) + dz^2, \quad (10.1,5)$$

поэтому значения коэффициентов Ламе будут $H_\alpha = H_\beta = c \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, $H_z = 1$, и уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ приводится к виду:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} = 0. \quad (10.1,6)$$

Если искать частные решения этого уравнения в форме

$$u = A(\alpha) B(\beta) Z(z), \quad (10.1,7)$$

то переменные разделяются, и мы получаем:

$$\frac{1}{c^2 (\alpha^2 + \beta^2)} \left[\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} \right] = -\frac{Z''}{Z} = \lambda^2,$$

где λ — произвольная постоянная, откуда следует

$$\left. \begin{aligned} Z'' + \lambda^2 Z &= 0, \\ \frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} - \lambda^2 c^2 (\alpha^2 + \beta^2) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.1,8)$$

Последнее, в свою очередь, возможно лишь в том случае, если

$$A'' + (\mu - \lambda^2 c^2 \alpha^2) A = 0, \quad (10.1,9)$$

$$B'' - (\mu + \lambda^2 c^2 \beta^2) B = 0, \quad (10.1,10)$$

где μ снова обозначает некоторую постоянную. Таким образом, уравнение Лапласа допускает бесконечное множество решений вида (10.1,7), зависящих от двух произвольных параметров λ и μ .

В большинстве задач физического характера параметр λ есть вещественное положительное число (§ 10.9); поэтому, вводя вместо (α, β) новые вещественные переменные (ξ, η) , $\xi = \alpha \sqrt{\lambda c}$, $\eta = \beta \sqrt{\lambda c}$ ($-\infty < \xi < \infty$, $0 \leq \eta < \infty$) и параметр ν , связанный с μ соотношением $\mu = \lambda c (2\nu + 1)$, мы приведем уравнения (10.1,9 — 10) к виду:

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + (2\nu + 1 - \xi^2) A = 0, \quad (10.1,11)$$

$$\frac{d^2 B}{d\eta^2} - (2\nu + 1 + \eta^2) B = 0. \quad (10.1,12)$$

§ 10.2. Функции Эрмита первого рода

Исследование уравнений (10.1,11—12), полученных при разделении переменных в уравнении Лапласа в параболических координатах, сводится к изучению дифференциального уравнения

$$u'' + (2\nu + 1 - z^2) u = 0 \quad (10.2,1)$$

при произвольных вещественных или комплексных z и v . Если ввести новую неизвестную функцию u , положив

$$u = e^{-\frac{z^2}{2}} v, \quad (10.2,2)$$

то рассматриваемое уравнение переходит в уравнение

$$v'' - 2zv' + 2\gamma v = 0, \quad (10.2,3)$$

которое при целом положительном $\gamma = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) совпадает с дифференциальным уравнением (4.10,4) для полиномов Эрмита $H_n(z)$, исследованных в гл. IV. Решения уравнения (10.2,3), при произвольном значении параметра v , носят название функций Эрмита, а соответствующие им решения уравнения (10.2,1) называются функциями параболического цилиндра*).

Функции Эрмита могут быть выражены через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \gamma, z)$. Действительно, принимая за новое независимое переменное $t = z^2$, мы преобразуем уравнение (10.2,3) в уравнение

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{dv}{dt} + \frac{\gamma}{2} v = 0, \quad (10.2,4)$$

которое есть частный случай уравнения (9.6,2), соответствующий значениям $\alpha = -\frac{\gamma}{2}$, $\gamma = \frac{\gamma}{2}$.

Согласно (9.6,3), общий интеграл дифференциального уравнения (10.2,4) будет:

$$v = AF\left(-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}, t\right) + Bt^{1/2}F\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{3}{2}, t\right), \quad (10.2,5)$$

*) Данное здесь определение несколько расходится с принятым в литературе, где под функциями параболического цилиндра понимают решения уравнения

$$u'' + \left(v + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) u = 0,$$

которое приводится к виду (10.2,1) с помощью подстановки $z = \sqrt{2}t$. Одним из решений рассматриваемого уравнения является функция $D_\nu(z)$, связанная с функцией Эрмита $H_\nu(z)$ (10.2,8) соотношением:

$$D_\nu(z) = 2^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_\nu\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right).$$

откуда непосредственно получается общее выражение для рассматриваемых функций:

$$v = AF\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + BzF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (10.2,6)$$

В частности, если выбрать значения постоянных равными

$$A = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad B = \frac{2^\nu \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (10.2,7)$$

мы приходим к решению

$$v = H_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right) + \frac{2^\nu \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} zF\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}, z^2\right), \quad (10.2,8)$$

которое называется функцией Эрмита первого рода.

Из данного определения и известных свойств гамма-функции и вырожденной гипергеометрической функции следует, что $H_\nu(z)$ есть целая функция комплексного переменного z и параметра ν .

Если $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то одно из слагаемых в (10.2,8) обращается в нуль, а другое — в полином относительно z . Воспользовавшись формулами (1.2,1—3) теории гамма-функции, получаем после простых преобразований:

$$\left. \begin{aligned} H_{2m}(z) &= (-1)^m \frac{(2m)!}{m!} F\left(-m, \frac{1}{2}, z^2\right), \\ H_{2m+1}(z) &= (-1)^m \frac{(2m+1)!}{m!} 2zF\left(-m, \frac{3}{2}, z^2\right) \end{aligned} \right\}, \quad (10.2,9)$$

откуда следует (9.8,9—10), что при $\nu = n$ функция Эрмита $H_\nu(z)$ совпадает с полиномом Эрмита n -го порядка.

При ν , отличном от нуля и целого положительного числа, общий интеграл уравнения (10.2,3) может быть полностью выражен через функции Эрмита первого рода. В самом деле, так как уравнение (10.2,3) не меняет своего вида,

если заменить в нем z на $(-z)$, то функция $v_2 = H_\nu(-z)$, наряду с функцией $v_1 = H_\nu(z)$, есть решение рассматриваемого уравнения. Обычным способом легко показать, что вронскиан пары решений $\{v_1, v_2\}$ уравнения (10.2,3) имеет вид:

$$W\{v_1, v_2\} = Ce^{z^2},$$

где C — некоторая постоянная. Полагая $z=0$ и принимая во внимание формулы:

$$H_\nu(0) = \frac{2^\nu \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad H'_\nu(0) = \frac{2^\nu \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}, \quad (10.2,10)$$

непосредственно следующие из определения функции Эрмита, получаем:

$$C = W\{v_1, v_2\}_{z=0} = -\frac{2^{2\nu+1} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} = \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)},$$

причем для упрощения использованы функциональные соотношения (1.2, 2—3) теории гамма-функции. Таким образом,

$$W\{H_\nu(z), H_\nu(-z)\} = \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2}, \quad (10.2,11)$$

откуда следует, что при $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$ рассматриваемые решения линейно независимы между собой и общий интеграл уравнения (10.2,3) может быть представлен в форме:

$$v = MH_\nu(z) + NH_\nu(-z). \quad (10.2,12)$$

При $\nu = n (n = 0, 1, 2, \dots)$ $W \equiv 0$, и найденные решения связаны линейной зависимостью:

$$H_n(-z) = (-1)^n H_n(z), \quad (10.2,13)$$

поэтому для построения общего интеграла уравнения (10.2,3) в этом случае необходимо введение функций Эрмита второго рода (§ 10.3).

Общее выражение функции параболического цилиндра при $\nu \neq 0, 1, 2, \dots$ будет:

$$u = u_\nu(z) = [M, H_\nu(z) + N, H_\nu(-z)] e^{-\frac{z^2}{2}}. \quad (10.2,14)$$

§ 10.3. Функции Эрмита второго рода

Чтобы получить общий интеграл уравнения (10.2,3) при ν , равном нулю или целому положительному числу, заметим предварительно, что если

$$v = e^{z^2} \frac{d^n w}{dz^n}, \quad (10.3,1)$$

то, по правилу Лейбница, $v'' - 2zv' + 2nv = e^{z^2} [w^{(n+2)} + 2zw^{(n+1)} + (2n+2)w^{(n)}] = e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} [w'' + 2zw' + 2w]$,

поэтому, если функция w удовлетворяет уравнению $w'' + 2zw' + 2w = 0$, (10.3,2)

то функция v , определяемая формулой (10.3,1), есть решение уравнения

$$v'' - 2zv' + 2nv = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.3,3)$$

Уравнение (10.3,2) легко интегрируется в общем виде. Действительно, нетрудно проверить, что функция $w = w_1 = e^{-z^2}$ есть частный интеграл этого уравнения, поэтому по известному правилу функция

$$w = w_2 = e^{-z^2} \int_0^z e^{z^2} dz = F(z) \quad (10.3,4)$$

будет также интегралом, линейно независимым с w_1 , и общий интеграл рассматриваемого уравнения запишется в виде:

$$v = Me^{-z^2} + NF(z), \quad (10.3,5)$$

где $F(z)$ — функция, рассмотренная в § 2.3.

Давая постоянным M и N конкретные значения, мы можем получить пару линейно независимых интегралов уравнения (10.3,3) с помощью соотношения (10.3,1). В частности, полагая $M = (-1)^n$, $N = 0$, находим:

$$v = v_1 = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n} = H_n(z). \quad (10.3,6)$$

$H_n(z)$ — полином Эрмита n -го порядка, что совпадает с результатом, полученным в § 10.2. Напротив, выбрав значения постоянных равными $M = 0$, $N = (-1)^n$, приходим к линейно независимому решению

$$v = v_2 = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} F(z) = G_n(z), \quad (10.3,7)$$

которое называется функцией Эрмита второго рода. Пользуясь этой функцией, мы можем получить общий интеграл уравнения (10.2,3) для исключительного случая $\nu = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), когда общая формула (10.2,12) теряет силу, в следующем виде:

$$\nu = MH_n(z) + NG_n(z). \quad (10.3,8)$$

Из определения функции Эрмита второго рода вытекает, что она представляет собой целую функцию комплексного переменного z , причем

$$G_n(-z) = (-1)^{n+1} G_n(z). \quad (10.3,9)$$

Нетрудно получить разложение $G_n(z)$ в степенной ряд. Действительно, рассматриваемая функция может быть представлена в форме (10.2,6), где положено $\nu = n$. На основании (10.3,9) для функций с четным индексом $n = 2m$ следует принять $A = 0$, для функций с нечетным индексом $n = 2m + 1$, соответственно, $B = 0$; вторая постоянная определится затем из условий *)

$$G_{2m+1}(0) = -G'_{2m}(0) = (-1)^{m+1} 2^{2m} m!, \quad (10.3,10)$$

откуда следует:

$$G_{2m+1}(z) = (-1)^{m+1} 2^{2m} m! F\left(-\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2}, z^2\right), \quad (10.3,11)$$

$$G_{2m}(z) = (-1)^m 2^{2m} m! z F\left(\frac{1}{2} - m, \frac{3}{2}, z^2\right). \quad (10.3,12)$$

Общий интеграл уравнения (10.2,1) при $\nu = 0, 1, 2, \dots$ может быть представлен с помощью введенных функций в следующей форме:

$$u = [M_n H_n(z) + N_n G_n(z)] e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.3,13)$$

§ 10.4. Рекуррентные соотношения для функций Эрмита

Функции Эрмита $H_\nu(z)$ удовлетворяют простым рекуррентным соотношениям, представляющим собой обобщение на случай произвольного значения индекса ν соответствующих формул § 4.10 для полиномов Эрмита.

*) Формулы (10.3,10) легко доказываются с помощью рекуррентных соотношений (10.4,6,8). Заметим еще, что

$$G_{2m}(0) = G'_{2m+1}(0) = 0.$$

Чтобы вывести рассматриваемые рекуррентные соотношения, выполним предварительно одно преобразование формулы (10.2,8), что приводит к новому представлению для функции $H_\nu(z)$ в виде степенного ряда с простыми коэффициентами.

Подставляя в (10.2,8) развернутые выражения гипергеометрических рядов (9.6,1) и воспользовавшись соотношениями

$$\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right) = 2^{\nu+1} \pi^{1/2} \Gamma(-\nu),$$

$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = -\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \pi,$$

вытекающими из (1.2,2—3), имеем:

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k - \frac{\nu}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} z^{2k} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1-\nu}{2}\right)}{k! \Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)} z^{2k+1} \right] = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right)} z^{2k} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{2k+1-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2k+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2k+3}{2}\right)} z^{2k+1} \right] = \\ &= \frac{\pi^{1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \Gamma\left(\frac{m-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)} z^m. \quad (10.4,1) \end{aligned}$$

Так как, на основании (1.2,3),

$$2^m \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right) = \pi^{1/2} \Gamma(m+1) = \pi^{1/2} m!,$$

Мы имеем тогда:

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2z)^m}{m!} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{m-\nu}{2}-1} ds = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{-\frac{\nu}{2}-1} ds \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2zs^{1/2})^m}{m!} = \\ &= \frac{1}{2\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-s-2zs^{1/2}} s^{-\frac{\nu}{2}-1} ds, \end{aligned}$$

откуда, если ввести новое переменное интегрирования $t = s^{1/2}$, следует:

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} e^{-t^2-2tz} t^{-\nu-1} dt, \quad R(\nu) < 0. \quad (10.5,1)$$

Полученная формула близка по типу к интегральным представлениям § 4.11, найденным ранее для полиномов Эрмита. Из (10.5,1), в частности, вытекает, что функции Эрмита с целым отрицательным значком выражаются в замкнутой форме через интеграл вероятности $\Phi(z)$ (§ 2.1). Действительно, полагая в (10.5,1) $\nu = -1$, мы находим:

$$H_{-1}(z) = \int_0^{\infty} e^{-t^2-2tz} dt = e^{z^2} \int_0^{\infty} e^{-(t+z)^2} dt = e^{z^2} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds,$$

откуда

$$H_{-1}(z) = \frac{\sqrt{\pi} e^{z^2}}{2} [1 - \Phi(z)] \quad (10.5,2)$$

и остальные $H_{-n}(z)$ ($n=1, 2, \dots$) получаются применением рекуррентной формулы (10.4,5).

§ 10.6. Функциональное соотношение между $H_\nu(z)$ и $H_\nu(\pm iz)$

Если в дифференциальном уравнении (10.2,3), которому удовлетворяет функция $v = H_\nu(z)$, ввести новые переменные, положив

$$v = e^{z^2} \varphi, \quad \zeta = iz, \quad (10.6,1)$$

то для функции $\varphi = \varphi(\zeta)$ получается уравнение

$$\varphi'' - 2\zeta\varphi' + 2(-1-\nu)\varphi = 0, \quad (10.6,2)$$

отличающееся от первоначального уравнения (10.2,3) только коэффициентом при последнем члене, где ν заменено на $(-1-\nu)$.

В предположении, что $\nu \neq -1, -2, \dots$, общий интеграл этого уравнения может быть представлен в форме (10.2,12):

$$\varphi = MH_{-\nu-1}(\zeta) + NH_{-\nu-1}(-\zeta), \quad (10.6,3)$$

откуда следует, если вернуться к старым переменным, что существует линейное соотношение вида:

$$H_\nu(z) = [MH_{-\nu-1}(iz) + NH_{-\nu-1}(-iz)] e^{z^2}. \quad (10.6,4)$$

Постоянные M и N могут быть определены из условий (10.2,10), которые приводят к системе уравнений:

$$M + N = \frac{2^{2\nu+1} \Gamma\left(1 + \frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)}, \quad M - N = \frac{2^{2\nu+1} \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right)}{i\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)}.$$

Если преобразовать правые части этих уравнений с помощью формулы*)

$$2^{2z-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)}{\Gamma(1-z)} = \frac{\Gamma(2z)}{\pi^{1/2}} \sin \pi z, \quad (10.6,5)$$

то получим:

$$M + N = \frac{2^{\nu+1} \Gamma(1+\nu)}{\pi^{1/2}} \cos \frac{\nu\pi}{2},$$

$$M - N = \frac{2^{\nu+1} \Gamma(1+\nu)}{\pi^{1/2}} i \sin \frac{\nu\pi}{2}. \quad (10.6,6)$$

Решая последнюю систему уравнений и подставляя найденные значения M и N в (10.6,4), приходим к искомому функциональному соотношению:

$$\begin{aligned} H_\nu(z) &= \frac{2^\nu \Gamma(1+\nu)}{\pi^{1/2}} \left[e^{\frac{\nu z i}{2}} H_{-\nu-1}(iz) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\frac{\nu z i}{2}} H_{-\nu-1}(-iz) \right] e^{z^2}. \quad (10.6,7) \end{aligned}$$

*) Эта формула является простым следствием соотношений (1.2, 2-3).

Формула (10.6,7) сохраняет смысл и для целых отрицательных ν , если понимать в этом случае под значением правой части ее предел при $\nu \rightarrow -(n+1)$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Заменяя в (10.6,7) z на $(-z)$, находим:

$$H_\nu(-z) = \frac{2^\nu \Gamma(1+\nu)}{\pi^{1/2}} \left[e^{\frac{\nu\pi i}{2}} H_{-\nu-1}(-iz) + e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} H_{-\nu-1}(iz) \right] e^{z^2}. \quad (10.6,8)$$

Из (10.6,7—8) можно чисто алгебраическим путем вывести ряд других полезных соотношений между рассматриваемыми функциями. Например, мы имеем:

$$H_\nu(z) = e^{\nu\pi i} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} e^{\frac{\nu+1}{2} \pi i} e^{z^2} H_{-\nu-1}(-iz), \quad (10.6,9)$$

$$H_\nu(z) = e^{-\nu\pi i} H_\nu(-z) + \frac{2^{\nu+1} \pi^{1/2}}{\Gamma(-\nu)} e^{-\frac{\nu+1}{2} \pi i} e^{z^2} H_{-\nu-1}(iz) \quad (10.6,10)$$

и т. д.

§ 10.7. Асимптотическое представление функций параболического цилиндра для больших значений аргумента *)

Чтобы получить асимптотические формулы, пригодные для представления функций Эрмита $H_\nu(z)$ при больших $|z|$ и ограниченном ν , предположим сначала, что $R(\nu) < 0$ и $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$.

Мы можем тогда представить $H_\nu(z)$ с помощью формулы (10.5.1) и, заменив в ней показательную функцию e^{-t^2} ее разложением в ряд Тейлора с остаточным членом

$$e^{-t^2} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!} + r_n(t), \quad (10.7,1)$$

где

$$|r_n(t)| \leq \frac{t^{2n+2}}{(n+1)!},$$

выполнить почленное интегрирование.

*) Формулы этого параграфа могут быть выведены также из общих асимптотических представлений § 9.7.

Принимая во внимание, что при $R(\nu) > 0$ и $R(\nu) < 0$

$$\int_0^\infty e^{-2tz} t^{2k-\nu-1} dt = \frac{\Gamma(2k-\nu)}{(2z)^{2k-\nu}}, \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (10.7,2)$$

находим:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(2k-\nu)}{k! \Gamma(-\nu)} \frac{1}{(2z)^{2k}} + R_n(z) \right], \quad (10.7,3)$$

где

$$R_n(z) = \frac{(2z)^{-\nu}}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty r_n(t) e^{-2tz} t^{-\nu-1} dt. \quad (10.7,4)$$

Пусть теперь $|\arg z| \leq \frac{\pi}{2} - \delta$, δ — произвольное малое фиксированное положительное число. Оценка по модулю в этом случае дает *)

$$|R_n(z)| \leq \frac{(2|z|)^{-R(\nu)} e^{\frac{\pi}{2} |I(\nu)|}}{|\Gamma(-\nu)| (n+1)!} \int_0^\infty e^{-2t|z| \sin \delta} t^{2n+1-R(\nu)} dt \leq \leq \frac{A_n(\nu)}{|z|^{2n+2}},$$

откуда следует, что в рассматриваемом секторе $R_n(z) = O(z^{-2n-2})$, и формула (10.7,3) может быть записана в виде:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(2k-\nu)}{k! \Gamma(-\nu)} \frac{1}{(2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right]. \quad (10.7,5)$$

Покажем, что полученный результат остается справедливым при произвольных ν . Действительно, предположим, что вместо условия $R(\nu) < 0$ выполнено только условие $R(\nu) < 1$. Воспользовавшись рекуррентной формулой (10.4,5), представим тогда $H_\nu(z)$ в форме

$$H_\nu(z) = 2z H_{\nu-1}(z) - 2(\nu-1) H_{\nu-2}(z), \quad (10.7,6)$$

где в правой стороне равенства находятся функции Эрмита с индексами, вещественная часть которых отрицательна.

*) Заметим, что если a и b — комплексные числа, то:

$$|a^b| = |a|^{R(b)} e^{-I(b) \arg a}.$$

Применяя к этим функциям доказанную формулу (10.7,5), мы после некоторых вычислений снова придем к формуле того же вида и тем самым распространим прежний результат на область значений $R(\nu) < 1$. Повторяя это рассуждение, по индукции докажем справедливость формулы (10.7,5) для любых ограниченных ν . Путем некоторого усовершенствования метода доказательства можно также показать, что найденная формула остается справедливой для более широкого сектора $|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta^*$. Таким образом для больших значений $|z|$ имеет место следующее асимптотическое представление функции Эрмита первого рода:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \nu)}{k! \Gamma(-\nu) (2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (10.7,7)$$

$|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta$, ν — ограничено.

При практических вычислениях, связанных с применением формулы (10.7,7), следует заменить в ней отношение гамма-функций выражением:

$$\frac{\Gamma(2k - \nu)}{\Gamma(-\nu)} = (-\nu)_{2k} = (-\nu)(-\nu + 1)(-\nu + 2) \dots (-\nu + 2k - 1), \quad (-\nu)_0 = 1. \quad (10.7,8)$$

Асимптотические представления для функции $H_\nu(z)$, пригодные в других секторах плоскости комплексного переменного, могут быть получены из (10.7,7) с помощью соотношений (10.6,9—10). В самом деле, предполагая, что

$$\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{4},$$

мы можем положить

$$\arg(-z) = \arg z - \pi, \quad \arg(-iz) = \arg z - \frac{\pi}{2},$$

* В этом случае, вместо интегрального представления (10.5,1) надлежит воспользоваться формулой

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2tz} t^{-\nu-1} dt,$$

где интегрирование производится по лучу $\arg t = \alpha$ и $|\alpha| < \frac{\pi}{4}$.

причем каждый из аргументов по абсолютной величине будет меньше, чем $\frac{3\pi}{4}$. Применяя к функциям Эрмита, входящим в правую часть формулы (10.6,9), равенство (10.7,7), находим:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \nu)}{k! \Gamma(-\nu) (2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right] - \frac{\pi^{1/2} e^{\nu\pi i}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} z^{-\nu-1} \times \left[\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2k + \nu + 1)}{k! \Gamma(\nu + 1) (2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (10.7,9)$$

$$\frac{\pi}{4} - \delta \leq \arg z \leq \frac{5\pi}{4} - \delta.$$

Аналогичным образом из (10.6,10) и (10.7,7) следует:

$$H_\nu(z) = (2z)^\nu \left[\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k \Gamma(2k - \nu)}{k! \Gamma(-\nu) (2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right] - \frac{\pi^{1/2} e^{-\nu\pi i}}{\Gamma(-\nu)} e^{z^2} z^{-\nu-1} \times \left[\sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(2k + \nu + 1)}{k! \Gamma(\nu + 1) (2z)^{2k}} + O(z^{-2n-2}) \right], \quad (10.7,10)$$

$$|z| \gg 1, \quad -\left(\frac{5\pi}{4} - \delta\right) \leq \arg z \leq -\left(\frac{\pi}{4} - \delta\right).$$

Совокупность формул (10.7,7—10) дает полное описание поведения функции $H_\nu(z)$ при больших значениях $|z|$. В общей области применимости этих формул они не противоречат одна другой, так как вторые слагаемые в последних двух формулах будут малы по сравнению с первыми и могут быть включены в символ $O(z^{-2n-2})$.

В заключение приведем без вывода асимптотическую формулу для функций Эрмита второго рода*:

$$G_n(z) \approx \frac{n!}{2z^{n+1}} e^{z^2}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{4} - \delta. \quad (10.7,11)$$

* Эту формулу можно, например, получить из (10.3,11—12) если воспользоваться (9.7,10).

§ 10.8. Функции Эрмита мнимого аргумента

В связи с уравнением (10.1,10) представляет интерес рассмотреть функции, являющиеся решениями дифференциального уравнения

$$u'' - (2\nu + 1 + z^2)u = 0, \quad (10.8,1)$$

которое только знаками отличается от уравнения (10.2,1) и переходит в это последнее при подстановке $t = zi$. Если ν — не целое положительное число, то, согласно (10.2,14), общий интеграл рассматриваемого уравнения может быть представлен в форме:

$$u = [MH_\nu(zi) + NH_\nu(-zi)] e^{\frac{z^2}{2}}, \quad \nu \neq 0, 1, 2, \dots \quad (10.8,2)$$

Пользуясь формулами (10.6,7), мы можем выразить каждый из интегралов $H_\nu(\pm iz)$ в виде линейной комбинации функций $e^{-z^2} H_{\nu-1}(\pm z)$, поэтому другая форма общего интеграла, эквивалентная первой, будет:

$$u = [M_1 H_{\nu-1}(z) + N_1 H_{\nu-1}(-z)] e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \nu \neq 0, 1, 2, \dots \quad (10.8,3)$$

Последнее выражение выгодно в том отношении, что оно содержит функции, которые при вещественных z и ν сами остаются вещественными. Если ν — целое положительное число, то аналогичным образом из (10.3,13) вытекает

$$u = [MH_n(zi) + NG_n(zi)] e^{\frac{z^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.8,4)$$

В этом случае для того, чтобы иметь дело с решениями, вещественными, когда переменное z принимает вещественные значения, удобно ввести две новые функции $h_n(z)$ и $g_n(z)$, определяемые при помощи равенств:

$$h_n(z) = i^{-n} H_n(iz), \quad g_n(z) = i^{-n-1} G_n(iz), \quad (10.8,5)$$

которые, по аналогии с соответствующим классом цилиндрических функций (§ 5.7), можно назвать функциями Эрмита мнимого аргумента первого и второго рода*). С помощью

*) Функции $h_n(z)$ и $g_n(z)$ являются решениями дифференциального уравнения $v'' + 2zv' - 2nv = 0$.

Постоянные множители в (10.8,5) введены с целью сделать рассматриваемые функции вещественными при вещественном z .

этих функций общий интеграл уравнения (10.8,1) при целом положительном $\nu = n$ может быть представлен в форме:

$$u = [M_1 h_n(z) + N_1 g_n(z)] e^{\frac{z^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10.8,6)$$

Аналитические выражения для рассматриваемых функций в виде гипергеометрических рядов непосредственно получаются из формул (10.2,9), (10.3,11—12) и соотношений (10.8,5), откуда следует:

$$\left. \begin{aligned} h_{2m}(z) &= \frac{(2m)!}{m!} F\left(-m, \frac{1}{2}, -z^2\right), \\ h_{2m+1}(z) &= \frac{(2m+1)!}{m!} 2zF\left(-m, \frac{3}{2}, -z^2\right), \\ g_{2m}(z) &= 2^{2m} m! zF\left(\frac{1}{2} - m, \frac{3}{2}, -z^2\right), \\ g_{2m+1}(z) &= 2^{2m} m! F\left(-\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2}, -z^2\right). \end{aligned} \right\} \quad (10.8,7)$$

Очевидно, что $h_n(z)$ есть полином и $g_n(z)$ — целая функция комплексного переменного z .

Аналогичным образом из (10.3,6—7) и (10.8,5) получаются выражения, дающие представления этих функций в замкнутой форме:

$$h_n(z) = e^{-z^2} \frac{d^n e^{z^2}}{dz^n}, \quad (10.8,8)$$

$$g_n(z) = e^{-z^2} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{z^2} \int_0^z e^{-z^2} dz \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{z^2} \Phi(z), \quad (10.8,9)$$

где $\Phi(z)$ — интеграл вероятности (§ 2.1).

Функции $h_n(z)$ и $g_n(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям одного и того же вида:

$$\begin{aligned} v_{n+2}(z) - 2zv_n(z) - 2nv_{n-1}(z) &= 0, \\ v'_n(z) &= 2nv_{n-1}(z) \end{aligned} \quad (10.8,10)$$

$n = 1, 2, \dots,$

где вместо $v_n(z)$ может быть подставлено $h_n(z)$ или $g_n(z)$.

Кроме введенных функций, во многих случаях является целесообразным рассматривать их линейную комбинацию

$$f_n(z) = h_n(z) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} g_n(z), \quad (10.8,11)$$

которую можно назвать функцией Эрмита третьего рода мнимого аргумента. Очевидно, что общий интеграл уравнения (10.8,1) при $\nu = n$ может быть записан, наряду с (10.8,6), также в следующей форме:

$$u = [M_2 h_n(z) + N_2 f_n(z)] e^{\frac{z^2}{2}}. \quad (10.8,12)$$

Из определения $f_n(z)$ следует, что эта функция допускает представление в виде

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \frac{d^n}{dz^n} \left(e^{z^2} \int_z^\infty e^{-z^2} dz \right) = \\ &= e^{-z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{z^2} [1 - \Phi(z)] \end{aligned} \quad (10.8,13)$$

и удовлетворяет тем же рекуррентным соотношениям (10.8,10) и дифференциальному уравнению, как функции первого и второго рода.

Так как

$$1 - \Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} dt, \quad (10.8,14)$$

из (10.8,13) легко получается интегральное представление для функции $f_n(z)$:

$$f_n(z) = \frac{2^{n+1} (-1)^n e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t^2 - 2zt} t^n dt. \quad (10.8,15)$$

Сопоставление (10.8,15) и (10.5,1) позволяет установить важное соотношение, существующее между функциями первого и третьего рода:

$$f_n(z) = \frac{2^{n+1} (-1)^n n! e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} H_{-n-1}(z). \quad (10.8,16)$$

Одно из полезных приложений найденного соотношения заключается в возможности вывести асимптотические представления функции $f_n(z)$ для больших $|z|$ из соответствующих

щих формул § 10.7. В частности, воспользовавшись (10.7,7), мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_n(z) &= \frac{(-1)^n n! e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z^{n+1}} \times \\ &\times \left[\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k \Gamma(2k+n+1)}{k! \Gamma(n+1) (2z)^{2k}} + O(z^{-2m-2}) \right], \end{aligned} \right\} (10.8,17)$$

$$|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta.$$

Формула (10.8,17) показывает, что при $|\arg z| \leq \frac{3\pi}{4} - \delta$

$$f_n(z) \approx \frac{(-1)^n n! e^{-z^2}}{\sqrt{\pi} z^{n+1}}, \quad (10.8,18)$$

следовательно, убывает весьма быстрым образом. Последнее свойство является характерным для функции $f_n(z)$, так как

$$h_n(z) \approx (2z)^n, \quad (10.8,19)$$

а $g_n(z)$ в рассматриваемом секторе ведет себя асимптотически, так же как $h_n(z)$.

§ 10.9. Краевая задача для параболического цилиндра

Специальные функции, исследованные в настоящей главе, позволяют дать решение краевых задач математической физики, в которых искомой функцией является гармонической в области, ограниченной поверхностью параболического цилиндра, и удовлетворяет на этой поверхности граничному условию определенного типа.

Чтобы найти совокупность частных решений уравнения Лапласа, пригодных для рассмотрения данного класса задач, введем систему параболических координат (10.1,1) и будем искать решения в виде произведения (10.1,7), в результате чего получим для определения отдельных множителей уравнения (10.1,8—10).

Если потребовать, чтобы рассматриваемые решения оставались ограниченными во всей области, включая и ее бесконечно удаленную часть, необходимо прежде всего считать

параметр λ вещественным числом, которое, без ограничения общности, можно принять положительным*). Соответствующее решение уравнения (10.1,8), ограниченное при $-\infty < z < \infty$, тогда будет:

$$Z = C \cos \lambda z + D \sin \lambda z, \quad \lambda \geq 0. \quad (10.9,1)$$

Далее, если параметр ν , связанный с параметром μ соотношением $\mu = \lambda c (2\nu + 1)$, не является целым положительным числом, мы можем, на основании § 10.2, представить общий интеграл уравнения (10.1,9) в виде:

$$A = [M H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) + N H_\nu(-\alpha \sqrt{\lambda c})] e^{-\frac{\lambda c}{2} \alpha^2}, \quad (10.9,2)$$

где $H_\nu(z)$ — функция Эрмита.

Из асимптотических представлений (10.7,7) и (10.7,9) следует:

$$H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\approx} (2\alpha \sqrt{\lambda c})^\nu,$$

$$H_\nu(-\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{\pi^{1/2} e^{\nu \pi i}}{\Gamma(-\nu)} (\alpha \sqrt{\lambda c})^{-\nu-1} e^{\lambda c \alpha^2}, \quad (10.9,3)$$

поэтому для ограниченности решения необходимо положить $N=0$. С другой стороны,

$$H_\nu(\alpha \sqrt{\lambda c}) \underset{\alpha \rightarrow -\infty}{\approx} -\frac{\pi^{1/2} e^{\nu \pi i}}{\Gamma(-\nu)} (\alpha \sqrt{\lambda c})^{-\nu-1} e^{\lambda c \alpha^2}, \quad (10.9,4)$$

следовательно, требуется принять $M=0$. Таким образом, при ν , отличном от целого положительного числа, решения, ограниченного при $\alpha \rightarrow \pm \infty$ и не равного тождественно нулю, не существует. При целом $\nu=n$ ($n=0, 1, 2, \dots$) общий интеграл (10.1,9) запишется в виде (10.3,13):

$$A = [M H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) + N G_n(\alpha \sqrt{\lambda c})] e^{-\frac{\lambda c}{2} \alpha^2}, \quad (10.9,5)$$

и, выбрав, на основании асимптотического поведения функции Эрмита второго рода (10.7.11), $N=0$, мы получим решение

$$A = M H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) e^{-\frac{\lambda c}{2} \alpha^2}, \quad (10.9,6)$$

*) Отрицательные значения параметра λ соответствуют тем же значениям постоянной разделения λ^2 , как и положительные.

ограниченное во всем интервале $-\infty < \alpha < \infty$. Общий интеграл уравнения (10.1,10), при $\mu = \lambda c (2n + 1)$, может быть представлен в форме

$$B = [P h_n(\beta \sqrt{\lambda c}) + Q f_n(\beta \sqrt{\lambda c})] e^{\frac{\lambda c}{2} \beta^2}, \quad (10.9,7)$$

где $h_n(z)$ и $f_n(z)$ — функции, определенные в § 10.8.

Для внешней задачи, где переменное β изменяется в пределах $\beta_0 < \beta < \infty$, следует, принимая во внимание асимптотические формулы (10.8,18—19), положить $P=0$. Напротив, для внутренней задачи, где $0 \leq \beta < \beta_0$, из условия ограниченности производных по (x, y) в точке $\alpha = \beta = 0$ необходимо принять $Q=0$ (ср. § 8.7). Таким образом, совокупность частных решений уравнения Лапласа, подходящих для решения внутренней задачи, будет:

$$u = u_{\lambda, n} = [M_{\lambda, n} \cos \lambda z + N_{\lambda, n} \sin \lambda z] \times \\ \times e^{-\frac{\lambda c}{2} (\alpha^2 - \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) h_n(\beta \sqrt{\lambda c}), \quad (10.9,8) \\ \lambda \geq 0, n = 0, 1, 2, \dots,$$

для внешней задачи:

$$u = u_{\lambda, n} = [M_{\lambda, n} \cos \lambda z + N_{\lambda, n} \sin \lambda z] \times \\ \times e^{-\frac{\lambda c}{2} (\alpha^2 - \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) f_n(\beta \sqrt{\lambda c}). \quad (10.9,9)$$

Решение краевых задач получается путем суперпозиции найденных частных решений.

Предположим для определенности, что мы имеем дело с первой краевой задачей для внутренней области и примем для упрощения, что функция $f=f(\alpha, z)$, входящая в граничное условие

$$u|_{\beta=\beta_0} = f, \quad (10.9,10)$$

а следовательно, и искомое решение $u=u(\alpha, \beta, z)$ суть четные функции переменного z^*). Мы допустим далее, что

*) Случай, когда f — нечетная функция z , исследуется совершенно аналогично, а решение для общего случая получается наложением решений, найденных для четной функции $f_1 = \frac{1}{2} [f(\alpha, z) + f(\alpha, -z)]$ и нечетной функции $f_2 = \frac{1}{2} [f(\alpha, z) - f(\alpha, -z)]$.

функция f может быть разложена в интеграл Фурье

$$f = \int_0^{\infty} f_{\lambda}(\alpha) \cos \lambda z d\lambda \quad (-\infty < z < \infty), \quad (10.9,11)$$

где

$$f_{\lambda} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f \cos \lambda z dz, \quad (10.9,12)$$

и предположим, что искомая функция также допускает представление в виде интеграла:

$$u = \int_0^{\infty} u_{\lambda}(\alpha, \beta) \cos \lambda z d\lambda \quad (-\infty < z < \infty). \quad (10.9,13)$$

Соответственно (10.9,8), мы можем искать $u_{\lambda}(\alpha, \beta)$ в форме ряда

$$u_{\lambda}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\lambda,n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(\alpha^2 - \beta^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) h_n(\beta \sqrt{\lambda c}), \quad (10.9,14)$$

$$-\infty < \alpha < \infty, \quad 0 \leq \beta < \beta_0.$$

Для определения коэффициентов $M_{\lambda,n}$ получаем тогда условие:

$$f_{\lambda}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{\lambda,n} e^{-\frac{\lambda c}{2}(\alpha^2 - \beta_0^2)} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) h_n(\beta_0 \sqrt{\lambda c}), \quad (10.9,15)$$

откуда, воспользовавшись теоремой разложения по полиномам Эрмита (§ 4.15), находим:

$$M_{\lambda,n} e^{\frac{\lambda c}{2} \beta_0^2} h_n(\beta_0 \sqrt{\lambda c}) =$$

$$= \frac{\sqrt{\lambda c}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c \alpha^2}{2}} f_{\lambda}(\alpha) H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) d\alpha. \quad (10.9,16)$$

Таким образом, значение коэффициента $u_{\lambda}(\alpha, \beta)$ дается суммой ряда

$$u_{\lambda}(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \beta_0^2)} \frac{h_n(\beta \sqrt{\lambda c})}{h_n(\beta_0 \sqrt{\lambda c})} H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) \times$$

$$\times \frac{\sqrt{\lambda c}}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\lambda c \alpha^2}{2}} f_{\lambda}(\alpha) H_n(\alpha \sqrt{\lambda c}) d\alpha, \quad (10.9,17)$$

подставляя который в формулу (10.9,13), мы получаем формальное решение поставленной задачи.

§ 10.10. Приложение к квантовой механике

Уравнение Шредингера для линейного гармонического осциллятора имеет вид:

$$\psi'' + \left\{ \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m^2 \omega_0^2}{\hbar^2} x^2 \right\} \psi = 0, \quad (10.10,1)$$

где ψ — волновая функция, m , ω_0 и E — масса, собственная частота и полная энергия осциллятора, \hbar — постоянная Планка *).

Квантовомеханическая проблема состоит в том, что требуется определить такие допустимые значения энергии, при которых уравнение (10.11,1) имеет решение, ограниченное в промежутке $-\infty < x < \infty$. Мы видели (§ 10.9), что такие решения существуют лишь в том случае, если **)

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega_0}{\hbar} (2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

откуда следует:

$$E = E_n = \omega_0 \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (10.10,2)$$

Волновая функция выражается через полиномы Эрмита.

*) См., например, А. Зоммерфельд, Волновая механика. Гостехиздат (1933).

**) Уравнение (10.11,1) совпадает с уравнением (10.1,9), если положить

$$\mu = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad \lambda c = \frac{m\omega_0}{\hbar}.$$

Упражнения

1. Показать, что функция Эрмита первого рода связана с функцией Уиттекера $W_{\lambda, \mu}(z)$ соотношением

$$H_\nu(z) = 2^\nu e^{\frac{z^2}{2}} z^{-1/2} W_{\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, -\frac{1}{4}}(z^2)$$

и вывести отсюда свойства функции $H_\nu(z)$.

Указание. Принять во внимание формулу (10.2,8).

2. Воспользовавшись результатом предыдущего примера и формулой (10.8,16), доказать, что

$$f_n(z) = \frac{(-1)^n n!}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} z^{-1/2} W_{-\frac{1}{4} - \frac{n}{2}, -\frac{1}{4}}(z^2).$$

3. Получить интегральное представление функции $f_n(z)$:

$$f_n(z) = \frac{2^{n+1} (-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-t^2} (t-z)^n dt.$$

Указание. Воспользоваться формулой (10.8,15).

4. Исходя из определения функции параболического цилиндра Уиттекера

$$D_\nu(z) = 2^{\frac{\nu}{2} + \frac{1}{4}} z^{-1/2} W_{\frac{1}{4} + \frac{\nu}{2}, -\frac{1}{4}}\left(\frac{z^2}{2}\right) = 2^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} H_\nu\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right),$$

получить все свойства этой функции из результатов настоящей главы.

ЛИТЕРАТУРА к ГЛАВЕ X

Уиттекер и Ватсон [1], Смирнов В. И. [1], Рыжик И. М. и Градштейн И. С. [1], Магнус и Оберхеттингер [1].

ЛИТЕРАТУРА

Адамов А. А.

[1] Вестник Петербургского политехнического института, 5 (1906), 127—143.

Барнс Е. (Barnes E. W.)

[1] Quarterly Journal, 39 (1908), 97—204.

[2] Proc. London Math. Soc. (2), 6 (1908), 141—177.

Бейтман Х. (Bateman H.)

[1] Partial Differential Equations of Mathematical Physics. New York (1944).

Бейтман Х. и Арчибалд (Bateman H. and Archibald).

[1] A Guide to Tables of Bessel Functions. Mathematical Tables and other Aids of Computations, 1, No. 7 (1943).

Ватсон Г. (Watson G. N.)

[1] Теория бесселевых функций. ГИИЛ. 1949.

[2] Cambridge Phil. Trans. 22 (1918), 290.

Вэбб и Эйри (Webb H. A. and Airey J. R.)

[1] Phil. Mag. (6), 36 (1918), 129—141.

Гаусс К. (Gauss C. F.)

[1] Ges. Werke, III, 123—163.

[2] Ges. Werke, III, 207—229.

Гобсон Е. (Hobson E. W.)

[1] Теория сферических и эллипсоидальных функций. ГИИЛ. 1952.

[2] Phil. Trans. of the Royal Society, 187 (A) (1896), 443—531.

Гринберг Г. А.

[1] Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР. 1948.

Грэй Э. и Метьюз Г. Б.

[1] Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ГИИЛ. 1949.

Джексон Д.

[1] Ряды Фурье и ортогональные полиномы. ГИИЛ. 1948.

Джефрис Г. и Джефрис Б. [Jeffreys H. and Jeffreys B.]

[1] Methods of Mathematical Physics. Cambridge. 1950.

Диткин В. А. и Кузнецов П. И.

[1] Справочник по операционному исчислению. Гостехиздат. 1949.

Ингам А. Е.

[1] Распределение простых чисел. ОНТИ. 1936.

Короус Я. (Korous J.)

[1] Rozprawy České Academie (2) 37 (1928) No.40, 28.

- Кузьмин Р. О.
[1] Бесселевы функции. ОНТИ. 1935.
- Куммер Е. (Kummer E. E.)
[1] Journal für Math. XV (1836), 39—83; 127—172.
- Курант Р. и Гильберт Д.
[1] Методы математической физики, т. I. Гостехиздат. 1952.
- Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В.
[1] Методы теории функций, комплексного переменного. Гостехиздат. 1951.
- Лангер Р. (Langer R. E.)
[1] Trans. of the Am. Math. Soc. 33 (1) (1931), 23—64.
[2] Trans. of the Am. Math. Soc. 34 (3) (1932), 447—480.
- Левин В. И. и Гросберг Ю. И.
[1] Дифференциальные уравнения математической физики. Гостехиздат. 1951.
- Лурье А. И.
[1] Операционное исчисление. Гостехиздат. 1950.
- Магнус В. и Оберхеттингер Ф. (Magnus W. und Oberhettinger F.)
[1] Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Berlin. 1948.
- Мак Роберт Т. (Mac Robert T. M.)
[1] Spherical Harmonics. Cambridge. 1945.
- Нильсен Н. (Nielsen N.)
[1] Handbuch der Theorie der Gammafunktion. Leipzig. 1906.
[2] Theorie des Integrallogarithmus und verwandter Transzendenten. Leipzig. 1906.
- Лебедев Н. Н.
[1] Прикладная математика и механика. 13, в. 5 (1949), 465—476.
[2] ДАН, 52, 8 (1946), 661—664.
[3] Прикладная математика и механика. 11 (1947), 251—258.
[4] Некоторые интегральные преобразования математической физики. Автореферат диссертации. Изд. ЛГУ. 1951.
- Риман Б. (Riemann G. F. B.)
[1] Ges. Math. Werke, s. 67—84.
- Рыжик И. М. и Градштейн И. С.
[1] Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат. 1951. Изд. 3-е.
- Сеге Г. (Szegö G.)
[1] Orthogonal Polynomials. American Mathematical Colloquium Publications. XXIII. New York. 1939.
- Смирнов В. И.
[1] Курс высшей математики, т. III, ч. 2. Гостехиздат. 1951.
[2] Курс высшей математики, т. IV. Гостехиздат. 1951.
- Страттон Дж.
[1] Теория электромагнетизма.
- Тихонов А. Н. и Самарский А. А.
[1] Уравнения математической физики. Гостехиздат. 1951.
- Уиттекер Е. (Witteker E. T.)
[1] Bulletin of the Amer. Math. Soc. 10 (1904), 125—134.

Уиттекер Е. и Ватсон Г.

[1] Курс современного анализа, т. II. ГТТИ. 1934.

Уиттекер Е. и Робинсон.

[1] Математическая обработка результатов наблюдений. ГТТИ. 1933.

Фихтенгольц Г. М.

[1] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II. Гостехиздат. 1951.

[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. Гостехиздат. 1949.

Флетчер А. (Fletcher A.)

[1] A Tables of Complete Elliptic Integrals. Phil. Mag. 36 (1940), 517.

Флетчер, Миллер и Розенхед (Fletcher A., Miller J. C. P. and Rosenhead).

[1] An Index of Mathematical Tables. New York. 1946.

Фок В. А.

[1] ДАН, 39 (1943), 279—283.

Франк Ф. и Мизес Р.

[1] Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ. 1937.

Шохат, Хилл и Уолш (Shohat J., Hill E., Walsh J. L.)

[1] A Bibliography on Orthogonal Polynomials. Bulletin of the National Research Council, No.103. Washington. 1940.

73328



Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
50	пример 6	$C(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi v^2}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) dx$	$C(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi v^2}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) dx$
67	пример 8	$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p}$	$\frac{1}{p} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p}$
101	формула (4.15,4) и 6 снизу	\sum_{∞}	\sum_m
109	3 сверху	$-2(1+\alpha)x$	$-2(2+\alpha)x$
132	пример 12	$\frac{d^n}{dx^n} \{x^{p+q-1}(1-x)^{p+n-q}\}$	$\frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+q-1}(1-x)^{p+n-q}\}$
137	формула (5.2,13)	$\psi(k+1)$	$-\psi(k+1)$
144	формула (5.4,12)	$\frac{Z}{\gamma+1}$	$\frac{Z}{\gamma+2}$
150	формула (5.7,9)	$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = 2I'_{\nu}(z)$	$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_{\nu}(z)$
170	формула (5.11,4)	$e^{i\left(z - \frac{\sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$	$e^{-i\left(z - \frac{\sqrt{z}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$
172	формулы (5.11,9—11)	$O(z^{-2n-2})$	$O(z^{-n-1})$
257	формула (7.12,2)	$(\nu-m)(\nu+m-1)$	$(\nu-m)(\nu+m+1)$
259	1 снизу	$\frac{\nu}{(z^2-1)^{1/2}} P_{\nu-1}(z) - \frac{\nu z}{(z^2-1)^{1/2}} P_{\nu}(z)$	$\frac{-\nu}{(z^2-1)^{1/2}} P_{\nu-1}(z) + \frac{\nu z}{(z^2-1)^{1/2}} P_{\nu}(z)$
266	6 сверху	$\frac{(-1)^m \Gamma(\nu+m+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)}$	$\frac{\Gamma(\nu+m+1)}{\pi \Gamma(\nu+1)}$
303	9 снизу	$0 \leq \alpha < \infty$	$0 \leq \alpha \leq \pi$
350	пример 12	$e^{-\frac{z}{2}}$	$e^{\frac{z}{2}}$

Редактор Г. П. Акилов
Техн. редактор К. М. Волчок

Подписано к печати 1/IX 1953 г. Т-05830.
Формат бумаги 84 × 103 1/2. Бум. л. 5,94.
Печ. л. 19,48. Уч.-изд. л. 20,07. Тираж 6000 экз.
Тип. зн. в печ. л. 41 228. Цена книги 10 р.
Передел 2 р. Заказ № 703.

2-я типография „Печатный Двор“ им. А. М. Горького Союзполиграфпрома Главиздата Министерства культуры СССР. Ленинград, Гатчинская, 26.